

I. まえがき

曲面で構成されているいわゆる立体の展開図あるいは表面積を求める方法については、すでに発表したように、図化されたコンターラインを利用するのが有効な手段と考えられるが、これらは一応閉合したコンターラインに囲まれた範囲全体の求積法であった。

しかし、実際にはそれを基にして、直線でカットされた部分の求積が要求される場合がある。いわゆる求積範囲を制限された場合であるが、これについても現在のところ適当な測定方法は見受けられないようである。

本研究は、こうした不連続点をもつある種の場合についての理論解を求め、種々のモデルケースについて比較検討を行ったものである。

II. 理論式の展開

隣接する2つのコンターラインが、直線AOCでカットされた場合について考え、これを直交座標軸に対応させる(図-1)

ケース1.

仮定 i) 面ABCOに平行に切断すれば、切口上の曲線(例えば $\widehat{ABC}$)はすべて同一形状の放物線となる。

ii) B点、D点はそれぞれ曲線ABC, 曲線ADCの頂点であり、それぞれZ軸、Y軸上にある。(図-2)

iii) 直線BDの変化を求める場合は、高さ h の直円錐台とする。

(図-3)

$$Z_0 = \frac{d \cdot h}{r_2 - r_1}$$

平面座標における曲線 $y = f(x)$ の ab 間の長さ l は一般に

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \quad \dots\dots\dots (1)$$

で表わされる。従ってカット部ABCDの表面積はY軸上各点の曲線長を求め、これを0から d まで積分すればよい。すなわち、

i 点での放物線は(2)式で表わされ、これを(1)式に代入することによりY軸上の曲線長を求める。

$$Z = -\frac{4Z_i}{D^2}x^2 + Z_i \quad \text{ただし} \quad Z_i = \frac{h(d-y_i)}{r_2-r_1} = \frac{2\pi h(d-y_i)}{U_n(m-1)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$f'(x) = \frac{dZ}{dx} = -\frac{8Z_i}{D^2}x$$

$$\text{ゆえに} \quad l(y) = \frac{8Z_i}{D^2} \left\{ x \sqrt{x^2 + \left(\frac{D^2}{8Z_i}\right)^2} + \left(\frac{D^2}{8Z_i}\right)^2 \log \left| x + \sqrt{x^2 + \left(\frac{D^2}{8Z_i}\right)^2} \right| \right\} - \left(\frac{D^2}{8Z_i}\right)^2 \log \frac{D^2}{8Z_i} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{ここで} \quad \alpha = \frac{8Z_i}{D^2} = \frac{16\pi h}{U_n D^2(m-1)}(d-y) \quad \text{とおけば(3)式は}$$

$$l(y) = x^2 \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} + \left(\frac{1}{\alpha}\right) \log \left| \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \right| + \frac{1}{\alpha} \log x \quad \dots\dots\dots (4)$$

と書き改められる。そこで切取部表面積 S は $S = \int_0^d l(y) dy$ より求められるが、 dy は上記より

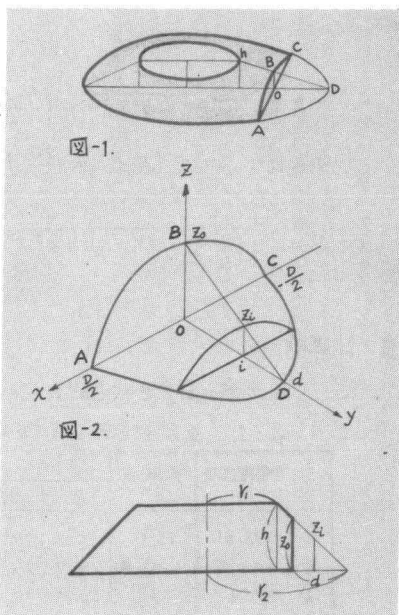


図-3. ケース1の説明図

1) 松井: 表面積測定に関する考察(47年6月 関西支部), 表面求積に関する試作プログラムについて(47年10月, オ27回学次大会)

$dy = -\frac{U_0 D^2 (m-1)}{16 \pi h} d\alpha$ であるから $y=0$ のとき $\alpha = \frac{16 \pi d h}{U_0 D^2 (m-1)}$, $y=d$ のとき $\alpha=0$ となり、結局

$$S = \frac{1.6 \sqrt{d}}{p} \left[\frac{D^2}{8} \left\{ p \sqrt{p^2 + \left(\frac{2}{D}\right)^2} + \left(\frac{2}{D}\right)^2 \log \left| p + \sqrt{p^2 + \left(\frac{2}{D}\right)^2} \right| + \left(\frac{2}{D}\right)^2 \log \frac{D}{2} \right\} + p \log \frac{D}{2} (p+0.8) + 1.6 \log (p+0.8) \right] \dots\dots(5)$$

ただし $p = \frac{16 \pi d h}{U_0 D^2 (m-1)}$

D : 切取部の弦長

h : コンターライン間隔

d : 弦から切取部曲線頂点までの水平距離

m : コンターラインの延長比

ケース2.

仮定 i) 曲線ABCと曲線ADCを放物線と考える。

ii) 求める部分の表面は直線abで代表され、A点よりC点まで積分したものを表面積とする。(図-4)

放物線ABC: $z = -\frac{4z_0}{D^2}x^2 + z_0$ ただし $z_0 = \frac{dh}{r_2 - r_1}$

放物線ADC: $y = -\frac{4d}{D^2}x^2 + d$

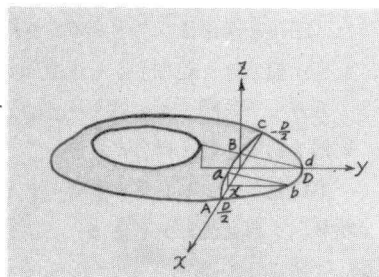


図-4. ケース2の説明図

$$\text{直線 } ab = \sqrt{y^2 + z^2} = \left(-\frac{4}{D^2}x^2 + 1\right) \sqrt{d^2 + z_0^2} \dots\dots(6)$$

$$\text{ゆえに } S = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} ab \cdot dx = \frac{2D}{3} \sqrt{d^2 + z_0^2}$$

となり、これに z_0 を代入し、変形すると S は次式より求められる。

$$S = \frac{2dD}{3(r_2 - r_1)} \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + h^2} = \frac{2dD}{3 \cdot U_0 (m-1)} \sqrt{(m-1)^2 U_0^2 + (Ch)^2} \dots\dots(7)$$

C : 係数(閉合曲線では 2π)

III. 計算例.

ここでは紙面の都合で代表的なものについて上記の計算を行った結果のみを示す。(表-1, 図-5)

表-1. 直線切取部を有する場合の理論値と展開図による実測値の比較

No.	全形理論値 $\bar{A}_0$	実測値 $\bar{A}_1$	ケース1.			ケース2.			条件				
			S	$\bar{A}_1$	誤差(%)	S	$\bar{A}_1$	誤差(%)	m	d	h	D	U_0
①	92.85	76.35	15.63	77.22	+1.1	17.42	75.43	-1.2	1.669	1.61	4	6.36	16.00
②	101.15	"	26.17	74.98	-1.8	27.17	73.98	-3.1	1.810	2.94	"	"	"
③	115.62	"	40.20	75.42	-1.2	38.17	77.46	+1.5	2.025	4.92	"	"	"

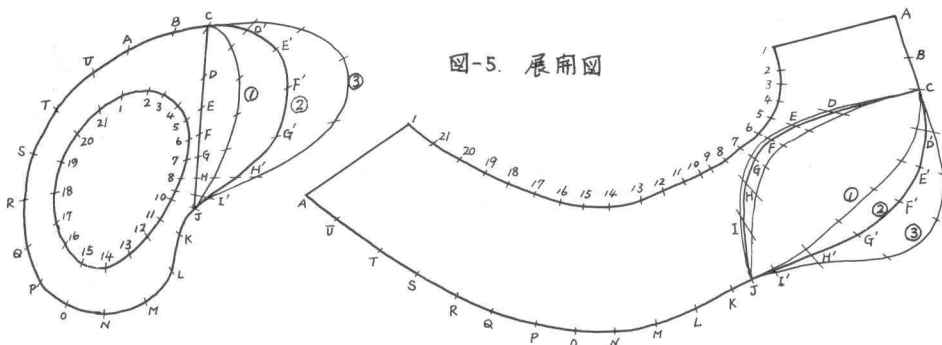


図-5. 展開図

IV. 考察

ケース1の理論式は一見繁雑のようであるが実際の計算は極めて迅速である。ケース2の式は閉合コンターの場合に酷似して極めて便利であるが、ケース1の式よりも誤差が大きい。以上は理論解にたいして種種検討した結果の一部であるが、全般的には特異なケースを除いて大体±3%以内の誤差で結果を得ることができる。このことは自然的な形状での表面積計算には実用上さしつかえないと思われる。