IV-102　マルコフ過程を用いた信号現示の最適化とその解法

名古屋工業大学　正員　松井　寛

まえがき

昨年度の年次学術講演会において、京大の佐佐木教授からマルコフ過程を用いた信号現示の最適化に対して、基本的な考え方が提案されたが[1]、その具体的な解法については今後の課題として残された。今回、この最適信号制御問題に対して、ポントリャーギンの最大値原理を用いることによって解法が与えられることを見い出したので、これを紹介するとともにその問題点について検討してみた。

問題の定式化とその解法

1つの街路網が与えられたとき、ある交差点から次の交差点までの区間を、方向別に別の街路区間としてそれぞれに番号をつける。いま区間 i ($i=1,2,\cdots n$) の時刻 t における交通密度を $x_i(t)$、平均空間速度を $v_i(t)$、区間長を l_i とすれば、この区間における状態方程式として次式が成立する[2]。

$$l_i \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_k P_{ki} v_k(t) x_k(t) - v_i(t) x_i(t) + Q_{si}(t) \qquad i=1,2,\cdots n \qquad (1)$$

ここに、右辺オ1項は隣接街路区間 k からの単位時間当りの流入量、オ2項は同じく流出量、オ3項の $Q_{si}(t)$ は街路区間 i における沿道からの流入交通量で、これはあらかじめ与えられる。また P_{ki} は交差点における街路区間 k から i への推移確率で、具体的には交差点における直進および右左折率を与えるものであり、$\sum_i P_{ki}=1$ を満足する。交差点における信号現示の影響を考慮すれば、P_{ki} は時間的に一定ではなく、一般に時間 t の関数形 $P_{ki}(t)$ で与えられる。ただしこのときは $0 \le \sum_i P_{ki}(t) \le 1$ である。

さて最適信号制御のための評価関数として、佐佐木氏は単位時間当りの台キロ最大あるいは台時最小を提案している。これらを式で表わすと(2)式、(3)式である。

$$\frac{1}{C}\sum_i\int_0^C v_i(t)x_i(t)\,dt \longrightarrow max. \qquad (2)$$

$$\frac{1}{C}\sum_i\int_0^C \frac{l_i x_i(t)}{v_i(t)}\,dt \longrightarrow min. \qquad (3)$$

ただし、ここに C は信号サイクル長で、ここではすべての交差点で一定としている。

以上の問題は数学的にいえば、ある系の状態が連立微分方程式で関係づけられているときの系の最適制御問題ということであり、その最適化の手法としてはポントリャーギンの最大値原理が適用される。まず推移確率 $P_{ki}(t)$ は、あらたに制御変数 $u_k(t)$ を用いて次のように書き換える。

$$P_{ki}(t) = P_{ki}\,u_k(t) \qquad (4)$$

ただしこの制御変数は

$$0 \le u_k(t) \le 1 \qquad (5)$$

なる制約を満足し、また各交差点における拘束条件として、たとえば十字交差の場合次式を満足しなければならない。(図-1参照)

$$u_k(t) = u_{k'}(t) = 1 - u_i(t) = 1 - u_{i'}(t) \qquad (6)$$

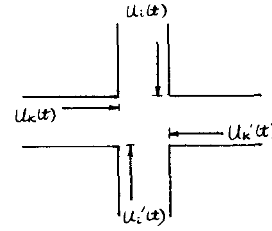

図-1

なお、直進、右折、左折の方向別に制御変数を変えたい場合は $u_{ki}(t)$ とすればよく、このときは制御変数の数が増え、また拘束条件も若干変わるが、解法自体は変わらない。

一方、$v_i(t)$ と $x_i(t)$ の間には一般に密接な関係が認められており、そこで速度と密度の関数を $v_i(t)=g_i\{x_i(t)\}$ で表わせば、結局先の状態方程式は状態変数(各街路区間の交通密度)と制御変数(信号現示)だけの関数として表現できる。よって $x=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T$, $u=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_r(t))^T$ とすれば、各街路区間における状態方程式は一般に

$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u)$ $(i=1,2,\cdots n)$ と書ける. 一方評価関数も一般形 $\int_0^t f_0(x,u)dt \rightarrow min.$ で表わし. $x_0(t) = \int_0^t f_0(x,u)dt$ なる新しい変数 $x_0(t)$ を導入すれば. 結局 $dx_0/dt = f_0(x,u)$ となり、この最適制御問題は次のように書き表わされる. "状態変数 $x_1, x_2 \cdots x_n$ に x_0 を加え. $\bar{x} = (x_0, x_1 \cdots x_n)^T$ とし, 初期条件 $\bar{x}(0) = (0, x_1(0), x_2(0) \cdots x_n(0))^T$ から出発して. $dx_i/dt = f_i(x, u)$ $(i=0,1,2,\cdots n)$ なる連立微分方程式に従って移動したとき. 最終時刻 $t=C$ における $x_0(C)$ が最小になるように. 信号制御ベクトル $u(t)$ を決定すること."

ここであらたに補助変数 $\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_n$ を考え. 次式で表わされるスカラー関数 (Hamilton関数) を導入する.

$$H(\psi, x, u) = (\psi, f(x,u)) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f_\alpha(x,u) \qquad (7)$$

最大値原理によれば. $u^*(t)$ が拘束条件を満足する最適制御ベクトルであり. しかもそれに対応する最適軌道 (トラジェクトリ) が $\bar{x}^*(t)$ ならば. 先の連続ベクトル関数 $\psi^*(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t) \cdots \psi_n(t))^T$ は.

$$\frac{d\psi_i^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f_\alpha(\bar{x}^*, u^*)}{\partial x_i} \psi_\alpha^* \qquad i = 0, 1, 2, \cdots n \qquad (8)$$

を満足し. また $\bar{x}^*(t)$ は次の微分方程式の解である.

$$\frac{dx_i^*}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} = f_i(\bar{x}^*, u^*) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots n \qquad (9)$$

また $0 \leq t \leq C$ の任意の t において. 関数 H は $u^*(t)$ のとき最大 (評価関数 → min. の場合)

$$\max_u H = H(\psi^*(t), \bar{x}^*(t), u^*(t)) \qquad (10)$$

となり. とくに終端時刻 $t=C$ を指定し. その終端状態を全く指定しない場合は. $0 \leq t \leq C$ にわたり最適制御においては $max\ H =$ 一定となり. しかも $\psi_1(C) = \psi_2(C) = \cdots = \psi_n(C) = 0$ を満足する.

実際に最大値原理を用いて問題を解く場合. 求める変数は $n+1$ 個の x_i, $n+1$ 個の ψ_i, および r 個の制御変数 u_k の合計 $2n+r+2$ であり、一方方程式としては (8) および (9) 式より $2n+2$ 個, (10) 式より r 個合計 $2n+r+2$ である. $2n+r+2$ 個の方程式のうち微分方程式は $2n+2$ 個であり. 解を求めるためには $2n+2$ 個の境界条件が必要となるが. $\bar{x}$ については $n+1$ 個, ψ については n 個, また (8) 式の右辺は ψ_i に関する同次式であり 各 f_i が x_0 を含まないから $d\psi_0/dt = 0$ となり ψ_0 は任意の定数でよい. (通常 $\psi_0 = -1$ とおく) よって $2n+2$ 個の境界条件が与えられることになり. 解が求まることになる.

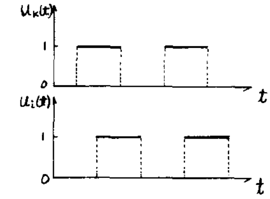

図-2

最大値原理において. 状態方程式が制御変数 $u(t)$ に関して線形のとき. $u_k(t)$ が u_k の上限と下限の間で切り替わるリレー式の制御 (これを bang-bang control と呼ぶ) となる. この最適信号制御の問題では (1) 式から明らかなように $u(t)$ に関して線形となるから. 結局 (5) 式の条件から $u_k(t)$ は 0 か 1 の値をとる階段関数となって、信号制御としてはまことに好都合である. とくに最適制御の解として求めた隣接2交差点の制御変数の 0 と 1 との切り換え時刻の差に注目すれば. これがいわゆる最適オフセットということであり、さらに周期 C を色々変えて計算すれば. 結局. サイクル. スプリット, オフセットの3つの信号操作変数の組み合わせによる最適化問題が解けることになる.

あとがき

最大値原理を適用して実際の最適制御問題を解こうとすると. 結局2点境界値問題を解かなければならなくなり. これが最大の難関である. しかしこれを数値計算によって解くためのアルゴリズムがいくつか提案されている.[3),4)]

参考文献 1). 佐佐木綱: "マルコフ過程を用いた信号現示の最適化モデル" 第27回年次学術講演会 1972 2) 松井寛: "Theory of Traffic Distribution through the Continuous-Time Absorbing Markov Process" 名工大学紀要 1969 3). 坂和, 田方: "最大原理による最適制御問題の数値解法" 制御工学 1966
4). 北森: "最大原理とその計算法" 計測と制御 1969