

京都大学工学部 正員 ○ 高木興一

京都市衛生研究所 正員 橋本和乎

京都大学工学部 正員 山本剛夫

道路交通騒音予測の一つの考え方として、音響パワーレベルの等しい車が無限に長い直線上で等間隔で走行していると仮定した場合、任意の地点における騒音レベルの時間変動はすでに計算されている。しかしながら、実際の交通流においては車頭間隔はむしろ指数分布を示す場合が多く、このような仮定の下での騒音レベルの分布についてもいくつかの検討がなされてはいるが、いまだ十分とは言えない。演者らは車頭間隔が指数分布をするような交通流からの騒音のレベル分布について若干の解析的な検討を行ない、これをモンテカルロ法によるシミュレーションの結果と比較したところ、ほぼ満足な一致がみられたので報告する。

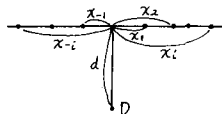


Fig. 1 Model of traffic flow

伝搬途上の音の反射、吸収等を無視した場合、D点における音の強さ I_w は、Fig. 1 のように x_i をとると、
$$I_w = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{d^2 + x_i^2} \quad \text{---- (1)}$$
 となる。したがって、

今、 $I = I_w/W$ とおき、音響パワーレベルを PWL とすれば、音圧レベル SPL は、
$$SPL = PWL + 10 \log_{10} I \quad \text{---- (2)}$$
 となる。I は確率変数となるが、その特性関数 $g(u)$ はショット雑音の問題等で用いられる理論¹⁾に適用すれば、
$$g(u) = \exp \left\{ -\frac{1}{S} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i u \frac{1}{4\pi} \frac{1}{d^2 + x^2}} - 1 \right) dx \right\} \quad \text{---- (3)}$$

となる。I の密度関数 $P(I)$ は、(3)式・特性関数 $g(u)$ をフーリエ変換することによって、
$$P(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i u I} g(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i u I} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{S} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i u \frac{1}{4\pi} \frac{1}{d^2 + x^2}} - 1 \right) dx \right\} du \quad \text{---- (4)}$$

の形に表わされるが、これを求めることは d の特別な値を除いては困難である。そこで、特性関数 $g(u)$ またはギュラント $K(u) = \log_e g(u)$ を適当な関数 $g_1(u)$ または $K_1(u)$ で近似し、これに対応する密度関数 $P_1(I)$ を求めて $P(I)$ の近似式とした。まず $K(u)$ から $P(I)$ の性質をしらべる。

$$K(u) = \log_e g(u) = \frac{2}{S} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{1} \frac{i u}{4\pi} \frac{1}{d^2 + x^2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{i u}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{(d^2 + x^2)^2} + \dots \right] dx = \frac{d\pi}{S} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{k! (2k-2)!!} \left(\frac{i u}{4\pi d^2} \right)^k = \frac{i u}{4Sd} F\left(\frac{1}{2}, 2; \frac{i u}{4\pi d^2}\right) \quad \text{---- (5)}$$

〔ただし、 $F\left(\frac{1}{2}, 2; \frac{i u}{4\pi d^2}\right)$ は Kummer の合流型超幾何関数〕 (5)式から、期待値 $m = \frac{1}{4dS}$ 分散 $\sigma^2 = \frac{1}{2 \times 16 \pi d^3 S}$ となる。また、 $I' = -\sqrt{2\pi d/S} + \sqrt{2 \times 16 \pi S} d^{3/2} I \quad \text{---- (6)}$

のように変換すると、 $d \rightarrow \infty$ のとき、 I' は $N(0, 1)$ となる。次に、 $d \rightarrow 0$ とすると、 $\left| \frac{i u}{4\pi d^2} \right| \rightarrow \infty$ となるので、 $F\left(\frac{1}{2}, 2; \frac{i u}{4\pi d^2}\right)$ の漸近展開を用いると、
$$K(u) = \left(-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}S} + i \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}S} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \left(\frac{4\pi d^2}{i u} \right)^k + \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{u}S} - i \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{u}S} \right) d^2 \exp \left(\frac{i u}{4\pi d^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \frac{(2k-1)!!}{2^k} \left(\frac{4\pi d^2}{i u} \right)^k \quad \text{---- (7)}$$

となり、 $d = 0$ では、 $K(u) = -\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}S} + i \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}S} \quad \text{---- (8)}$ となる。これは(3)式において、 $d = 0$ としたときに得られる値に等しい。また、このときの密度関数は(8)式をフーリエ変換することによって、
$$P(I) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}S} e^{-\frac{1}{4S^2} I^2} \quad \text{---- (9)}$$
 となる。 $K(u)$ の近似式 $K_1(u)$ として、
$$K_1(u) = \frac{d\pi^2}{S} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \frac{1}{k!} \left(\frac{i u}{4\pi d^2} \right)^k = \frac{2d\pi^2}{S} - \frac{\pi^{3/2}}{S} (4\pi d^2 - i u)^{1/2} \quad \left[\left| \frac{i u}{4\pi d^2} \right| \leq 1 \right] \quad \text{---- (10)}$$

$$K_1(u) = \frac{2d\pi^2}{S} + \left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}S} + i \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}S} \right) \pi^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{4\pi d^2}{i u} \right)^k = \frac{2d\pi^2}{S} - \frac{\pi^{3/2}}{S} (4\pi d^2 - i u)^{1/2} \quad \left[\left| \frac{i u}{4\pi d^2} \right| > 1 \right] \quad \text{---- (11)}$$

を用いることにする。すなわち、結果的には $\frac{i u}{4\pi d^2}$ の値に関係なく、 $K_1(u) = \frac{2d\pi^2}{S} - \frac{\pi^{3/2}}{S} (4\pi d^2 - i u)^{1/2} \quad \text{---- (12)}$

を用いる。ただし、 α は d, S のみの関数で、 $d \rightarrow 0$ のとき $\alpha \rightarrow 0$ 、 $d \rightarrow \infty$ のとき $\alpha \rightarrow 1$ になるように選ぶものとする。このような $K_1(u)$ を用いると、 $d \rightarrow 0$ では、 $K(u)$ において $d \rightarrow 0$ としたときの値、すなわち、(8)式に一致する。また、 $K_1(u)$ に対応する確率変数 I を(6)式と同じ式で I' に変換し、 $d \rightarrow \infty$ とすると、 I' は $N(0, 1)$ となる。すなわち、 $K(u)$ の近似式として、(12)式で示される $K_1(u)$ を用い、これに対応する $P(I)$ を求めれば、 $d \rightarrow 0$ 、 $d \rightarrow \infty$ においては $P(I)$ に一致する。また、 $K_1(u)$ から求まる期待値は、 $m_1 = \frac{1}{4dS}$ 、分散は、 $\sigma^2 = \frac{1}{2 \times 16 \pi^2 S d^3}$ となる。

ので、期待値 m_1 はすべての d, S について m と一致し、分散の比は $\sigma_1^2/\sigma^2 = \pi^{1-\alpha}$ となる。

いま、 $\alpha = 4\pi^2 d^2$ 、 $\beta = \pi^2/4S^2$ とおいて $P_1(I)$ を求めると、

$$P_1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i u} e^{i u \kappa} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\{2\sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{2\beta}(\sqrt{u^2 + \alpha^2} + \alpha)^{1/2}\} \{\cos\sqrt{2\beta}(\sqrt{u^2 + \alpha^2} - \alpha)^{1/2} \cos I u + \sin\sqrt{2\beta}(\sqrt{u^2 + \alpha^2} - \alpha)^{1/2} \sin I u\} du$$

$$= \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \exp(2\sqrt{\alpha\beta}) I^{-3/2} e^{-\alpha I/\beta} \quad (I \geq 0) \quad \text{----- (13)}$$

となる。次に、 $X = 10 \log_{10} I$ として相対音圧レベル X の密度関数 $f(X)$ を (13) 式から求めると、

$$f(X) = \frac{\log_e 10}{20 S \pi^{1/2} (1-\alpha)} \cdot 10^{-\frac{X}{20}} \cdot \exp\left\{\pi^2 \left(-\frac{2d}{S} - 4d^2 \cdot 10^{-\frac{X}{20}} - \frac{1}{4S^2} \cdot 10^{-\frac{X}{10}}\right)\right\} \quad \text{----- (14)}$$

となる。 X の期待値 m_x は、 $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} X f(X) dX = \int_0^{\infty} \left(\frac{10}{\log_e 10} \log_{10} I\right) P_1(I) dI \quad \text{----- (15)}$

で与えられる。この値は、 $I = 1/t$ と変数変換することにより、

$$M(x) = -A \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4S^2} t - 4d^2 \pi^2 \frac{1}{t}\right) dt \quad \text{---- (16)} \quad \left[\text{ただし、} A = \left(e^{\frac{2d\pi^2}{S}} / 2S \pi^{1/2} (1-\alpha)\right) \times \left(\frac{10}{\log_e 10}\right)\right]$$

において、 $\frac{dM(x)}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{2}}$ としたものに等しい。しかるに $M(x)$ は、 $M(x) = -A \cdot 2(4dS)^x K_x(2\frac{d}{S}\pi^2) \quad \text{---- (17)}$

【ただし、 $K_x(2\frac{d}{S}\pi^2)$ は x 次の第二種変形ベッセル関数】 となるので、

$$m_x = M'(x) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -\left(\frac{10}{\log_e 10}\right) \left[\log_e 4dS - \exp\left(\frac{4d\pi^2}{S}\right) E_i\left(-\frac{4d\pi^2}{S}\right)\right] \quad \text{----- (18)}$$

【ただし、 $E_i(-\frac{4d\pi^2}{S})$ は積分指数関数】 となる。同様にして、 $\sigma_x^2 + m_x^2 = -\left(\frac{10}{\log_e 10}\right) \frac{d^2 M(x)}{dx^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} \quad \text{---- (19)}$

から σ_x^2 を求めることができる。電算機を用いて、 $S = 50, 100, 200, 400, 800 \text{ m}$ 、 $d = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 \text{ m}$ のおのおのについて 500 回ないし 2000 回ずつモンテカルロ法によるシミュレーションを行った。この結果から、(14) 式にもっともよく適合する d の値を求め、 d/S の値に対応して d をプロットすると、 $d = \frac{(\pi d/S)^2}{1 + (\pi d/S)^2}$ の形のときほど十分な一致を示すことが判明した。Fig. 2, Fig. 3 にモンテカルロ法による結果と、(14) 式、(18) 式による計算値との対応の数例を示した。

なお、電算機による計算にあたっては、京都大学工学部衛生工学科助教 平松幸三氏の協力を得た。

文献

$S = 400 \text{ m}$

1) たとえば 宮脇一男 雑音解析 p47~ 朝倉書店

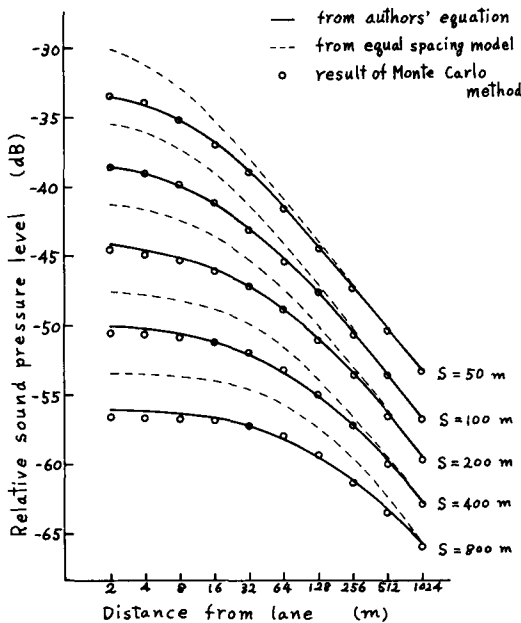


Fig. 2 Mean sound pressure level

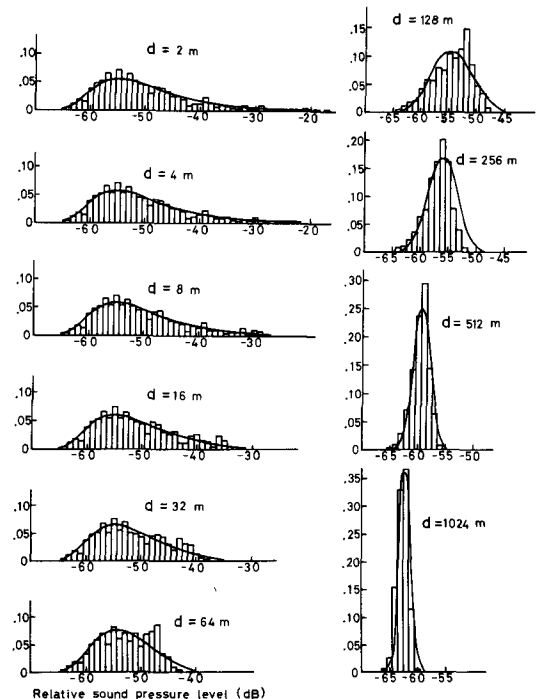


Fig. 3 Distribution of relative sound pressure level