IV-60　待ち行列理論によるランプ合流モデル

京都大学工学部　正員　井上博司

1.まえがき

待ち行列理論を用いた合流交通現象の解析はこれまで数多くなされてきている。しかしそれらのほとんどは，側路で停止している車が主道路上に合流に必要なギャップが到達したときに主道路への合流が行れるとするいわゆる静的合流を取り扱ったものである。各モデルの相異点は主道路，側路への車の到着，ギャップアクセプタンス関数などの違いである。ここでは，ランプから進入してきた車が，本線に並行している加速車線を走っている間に本線上に必要なギャップを見つけて合流を行ういわゆる動的合流を取り扱う。静的合流モデルと動的合流モデルの基本的な相異はサービス時間のとり方にあり，静的合流モデルでは合流に必要な時間そのものがサービス時間と考えられるが，この動的合流モデルでは反応遅れ時間をサービス時間にとっている。本研究の主要な目的は，本線交通量が与えられたときのランプからの最大流入可能量を求めることであり，以下にそのための合流モデルについて述べる。

2.ランプ合流部交通現象の待ち合わせ理論による定式化

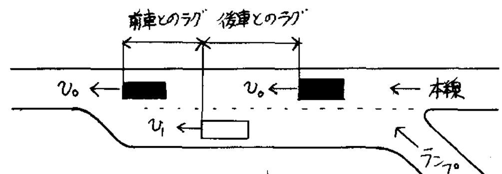

図.1 ランプ合流部

本線の外側車線に1車線のランプが合流する場合について考える。合流部での本線の外側車線と内側車線の間の車線変更はないものとしておく。本線交通およびランプ交通の合流部への到着は，それぞれ平均λ，νのポアソン分布にしたがうと仮定する。したがって到着時間間隔はいずれも指数分布にしたがうことになる。合流に必要なラグはすべてのランプ交通について等しく，前車との間にτ_1，後車との間にτ_2とする。前車が合流を始めてから後車が合流挙動を起すまでの反応遅れ時間は平均$1/\mu$の指数分布にしたがうものとする。合流順序は先着順とする。加速車線上の合流待ち台数が0のとき，ランプから合流部に到着した車が合流挙動を起こすまでの遅れ時間も平均$1/\mu$の指数分布にしたがうものとする。

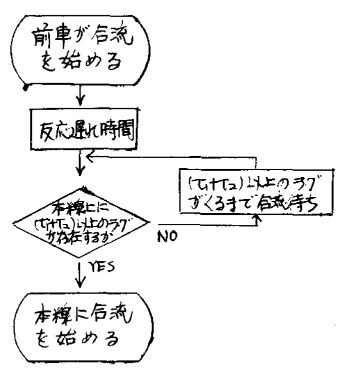

図.2 合流のブロックチャート

いま時刻tに加速車線上にn台の車が合流待ちをしており，かつ先頭の車は現時点では合流できないが，本線上に必要なラグが見い出されたときに合流を行うという状態にある確率を$S_n(t)$で表わす。このとき，微小時間dtの間に合流できる確率は$\lambda(1-v_1/v_0)e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}/\{1-e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}\}$である。つぎに，時刻$t$に加速車線上に$n$台の車が合流待ちをしており，かつ先頭の車は時間遅れによってまだ合流挙動に入っていない状態にある確率を$D_n(t)$で表わす。このとき，微小時間dtの間に合流できる確率は$\mu e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}dt$である。加速車線上の合流待ち台数が0である確率を$D_0(t)$とする。以上のことより次の4つの式がなり立つ。

$$D_n(t+dt) = D_{n-1}(t)\nu dt + D_n(t)(1-\mu dt-\nu dt) + D_{n+1}(t)\mu e^{-\lambda\tau}dt + S_{n+1}(t)\lambda(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}dt \quad (n \geqq 1) \quad \text{-----}(1)$$

$$D_0(t+dt) = D_0(t)(1-\nu dt) + D_1(t)\mu e^{-\lambda\tau}dt + S_1(t)\lambda(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}dt \quad \text{-----}(2)$$

$$S_n(t+dt)=S_{n-1}(t)\nu dt+S_n(t)\left\{1-\nu dt-\lambda(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}dt\right\}+D_n(t)\mu(1-e^{-\lambda\tau})dt \quad (n\geqq 2) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$S_1(t+dt)=S_1(t)\left\{1-\nu dt-\lambda(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}dt\right\}+D_1(t)\mu(1-e^{-\lambda\tau})dt \quad \cdots\cdots(4)$$

ここに　$\tau=\tau_1+\tau_2$,　$\varphi=v_1/v_0$　である。

上の方程式(1), (2), (3), (4) の定常解を求めると,

$$D_n=\frac{\nu(C-1)(B-\nu)}{\mu(\nu C-\nu-\mu+B)(B-\nu C)}\left\{(\mu-\nu C)\left(\frac{\nu}{B}\right)^n-(\mu-B)\frac{1}{C^n}\right\} \quad (n\geqq 0) \quad \cdots\cdots(5)$$

$$S_n=\frac{(C-1)(B-\nu)(\mu-\nu C)(\mu-B)}{\mu(\nu C-\nu-\mu+B)(B-\nu C)}\left\{\left(\frac{\nu}{B}\right)^n-\frac{1}{C^n}\right\} \quad (n\geqq 1) \quad \cdots\cdots(6)$$

ここに D_n, S_n はそれぞれ $D_n(t)$, $S_n(t)$ の定常値であり,

$$B=\frac{1}{2}\left(\mu+\nu+\lambda(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}+\sqrt{\left\{\mu+\nu+\lambda(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}\right\}^2-4\nu\left\{\mu e^{-\lambda\tau}+\frac{\mu\lambda}{\nu}(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}\right\}}\right) \quad \cdots\cdots(7)$$

$$C=\frac{1}{2\nu}\left(\mu+\nu+\lambda(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}-\sqrt{\left\{\mu+\nu+\lambda(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}\right\}^2-4\nu\left\{\mu e^{-\lambda\tau}+\frac{\mu\lambda}{\nu}(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}\right\}}\right) \quad \cdots\cdots(8)$$

である。待ち行列長が無限にならないためには $\nu/B<1$,　$1/C<1$　でなければならない。これより

$$\nu<\frac{\mu\lambda(1-\varphi)}{\mu(e^{\lambda\tau}+e^{-\lambda\tau}-2)+\lambda(1-\varphi)} \quad \cdots\cdots(9)$$

をうる。よってランプからの単位時間当りの最大流入可能量 ν^* は,

$$\nu^*=\frac{\mu\lambda(1-\varphi)}{\mu(e^{\lambda\tau}+e^{-\lambda\tau}-2)+\lambda(1-\varphi)} \quad \cdots\cdots(10)$$

となる。また本線交通量λ, ランプ交通量νのときの平均待ち行列長（加速車線上の平均合流待ち台数）Lは次式で与えられる。

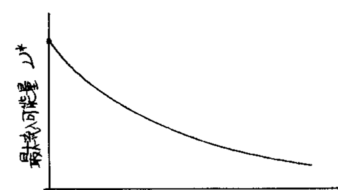

図.3 本線交通量と最大流入可能量

$$L=\frac{(C-1)(B-\nu)}{\mu(\nu C-\nu-\mu+B)(B-\nu C)}\left\{(\mu-\nu C)(\nu+\mu-B)\frac{\nu}{B(1-\frac{\nu}{B})^2}-(\mu-B)(\nu+\mu-\nu C)\frac{1}{C(1-\frac{1}{C})^2}\right\} \quad \cdots(11)$$

3．加速車線長を考慮したときのランプからの最大流入可能量

加速車線長を考慮したときのランプからの最大流入率を求める。ここではランプ交通量は本線交通量に比べて十分小さいものとし, 動的合流の場合の反応遅れ時間は無視する。AB間は動的合流の行われる区間とし, B点までに合流できなければBC間で停止して静的合流を行うものとする。

いま, A点から x の点までに合流できる確率を $g(x)$ とすると,

$$g(x+dx)=g(x)+\{1-g(x)\}\lambda(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda\tau}}\frac{1}{v_1}dx \quad \cdots\cdots(12)$$

が成り立つ。$g(0)=e^{-\lambda\tau}$ として上式を解くと,

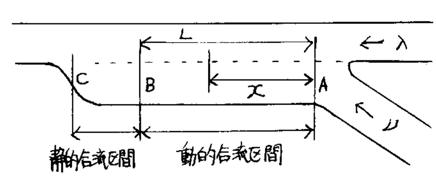

図.4 加速車線長を考慮したときの合流形態

$$g(x)=1-(1-e^{-\lambda\tau})e^{-\lambda(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}x}{(1-e^{-\lambda\tau})v_1}} \quad \cdots\cdots(13)$$

となる。静的合流の場合の最大流入可能量は式(10)で $\varphi=0$ とおくことによって得られるから, これがB点への到着率と等しくなるようなνの値 ν_0 を求めると,

$$\nu_0=\frac{\mu\lambda}{\mu(e^{\lambda\tau'}+e^{-\lambda\tau'}-2)+\lambda}\cdot\frac{e^{\lambda(1-\varphi)\frac{e^{-\lambda\tau}L}{(1-e^{-\lambda\tau})v_1}}}{1-e^{-\lambda\tau}} \quad \cdots\cdots(14)$$

となる。ここに τ' は静的合流の場合の合流可能ラグであり, Lは動的合流区間長である。