Ⅳ-38　都市施設の最適配置プロセスに関する研究

京都大学　正会員　森田昌久

1. はじめに

本論文は長期的な視野のもとにおける都市施設の最適配置プロセス，つまり，いつどこにどのような施設をどれだけ建設するのが長期的に見て効率的であるかを簡単な数理モデルを用いて研究しようとするものである。

2. 問題の定式化

ここでは以下のように単純化されたひとつの都市を想定する。この都市は全体としてn地区より成り，d_ℓおよびS_ℓを第ℓ番目の地区の都心からの距離および面積とし，

$$d_1 < d_2 < \cdots < d_\ell < \cdots < d_n \tag{1}$$

$$0 < S_\ell < \infty,\ \ell = 1, 2, \cdots, n-1,\ S_n = \infty \tag{2}$$

と仮定する。一方，簡単のため都市は2種類の施設のみから成っていると仮定し，これらを$i = 1, 2$で示す。たとえば$i=1$は業商務用オフィスで$i=2$は住宅と考えることができるであろう。計画期間0〜Tの各時刻tにおける各施設の都市全体での必要量$D_i(t)$は外生的に与えられているものと仮定する。よって$x_{i\ell}(t)$を時刻t，地区ℓの施設iの量とすると次の条件が満たされる必要がある。

$$\sum_{\ell=1}^{n} x_{i\ell}(t) = D_i(t),\ i = 1, 2 \tag{3}$$

この制約は次のように微分形式で表わすこともできる。

$$\sum_{\ell=1}^{n} \dot{x}_{i\ell}(t) = \dot{D}_i(t),\ i = 1, 2 \tag{4}$$

$x_{i\ell}(t)$は地区ℓに施設iを建設または破壊することにより増加，減少する。したがって，$u_{i\ell}(t)$および$v_{i\ell}(t)$をそれぞれ地区ℓ，時刻tにおける施設iの建設量および破壊量[個/時間]とすると次の関係にある。

$$\dot{x}_{i\ell}(t) = u_{i\ell}(t) - v_{i\ell}(t) \tag{5}$$

$$u_{i\ell}(t) \geqq 0,\ v_{i\ell}(t) \geqq 0 \tag{6}$$

つぎに，各施設の1単位に要する敷地面積は定数とし，これらをk_i[m²/個]で示す。そうすると各地区では次の面積制約が満たされていなければならない。

$$\sum_{i=1}^{2} k_i x_{i\ell}(t) \leqq S_\ell,\ \ell = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

一方，各配置プロセスの評価要因として，建設された施設から得られる便益と，施設の建設および破壊に要する費用が考えられる。各施設1単位の建設に要する費用をb_i，その破壊に要する費用（立ちのき料等も含めて）をC_i[円/個]で示し，これらは定数とする。次に，各施設の1単位から得られる単位時間当りの便益は都心で最大B_i[円/個]であり，都心からの距離に応じてr_iの率で比例的に減少すると仮定する。よって本研究では，施設から得られる便益から施設の建設・破壊に要する費用をさし引いた，純便益の計画期間全体における合計である次の値を目的関数として用いる。

$$\int_0^T \rho(t)\left(\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{2}(B_i - r_i d_\ell)x_{i\ell}(t) - b_i u_{i\ell}(t) - C_i v_{i\ell}(t)\right)dt \tag{8}$$

ここに$\rho(t)$は時間tにおける便益に対するウエイトで

$$\rho(t) > 0,\ 0 \leqq t \leqq T,\ \rho(t=0) = 1 \tag{9}$$

とする。以上より本研究における問題は次のように定式化される。

<u>問題</u>

計画期間全体における純便益の合計である

$$\int_0^T \rho(t)\left(\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{2}(B_i - r_i d_\ell)x_{i\ell}(t) - b_i u_{i\ell}(t) - C_i v_{i\ell}(t)\right)dt$$

を以下の制約条件のもとで最大にする建設速度$u_{i\ell}(t)$および破壊速度$v_{i\ell}(t)$の値（$0 \leqq t \leqq T$）を求めよ。

a). 施設量変化式

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_{i\ell}(t) = u_{i\ell}(t) - v_{i\ell}(t) \\ &u_{i\ell}(t) \geqq 0,\ v_{i\ell}(t) \geqq 0 \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} &i = 1, 2 \\ &\ell = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

b). 施設量制約

$$\sum_{\ell=1}^{n} u_{i\ell}(t) = \sum_{\ell=1}^{n} v_{i\ell}(t) + \dot{D}_i(t),\quad i = 1, 2.$$

c). 面積制約

$$\sum_{i=1}^{2} k_i x_{i\ell}(t) \leqq S_\ell,\quad \ell = 1, 2, \cdots, n.$$

d) 施設量の非負制約

$$x_{i\ell}(t) \geqq 0,\quad i = 1, 2,\ \ell = 1, 2, \cdots, n$$

e) 初期条件

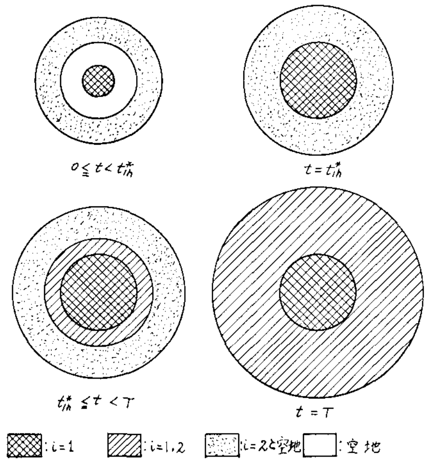
$$\left.\begin{aligned} &x_{i\ell}(t=0) = x_{i\ell}(0) \geqq 0 \\ &D_i(t=0) = D_i(0) = \sum_{\ell=1}^{n} x_{i\ell}(0) \\ &\sum_{i=1}^{2} k_i x_{i\ell}(0) \leqq S_\ell \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} &i = 1, 2 \\ &\ell = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

ただし，$\dot{D}_i(t)$および$\rho(t)$はtに関して連続と仮定する。また，各定数はすべて正とする。なお本研究は都市がたえず拡大する場合に注目しているので，$\dot{D}_i(t) > 0$，$0 \leqq t \leqq T$，$i = 1, 2$と仮定しておく。

3.最適配置プロセス

以上の問題に対する最適解は最大原理[1),2)]を適用することにより求められる。簡単のためにここでは以上の問題において，$v_{il}(t)\equiv 0,\ (0\leqq t\leqq T)$，つまり再開発のゆるされない場合の一般解を要約すると以下のようになる。これは，計画期間の長さにくらべ，施設の破壊・移転に要する費用C_iが非常に大きい場合に相当する。ただし以下において $\sigma(t)\equiv\int_0^t \rho(\tau)d\tau$ であり，$x_{il}(0)=0$とする。また，施設の単位面積から得られる便益の都心からの距離に対する低減率r_i/k_iは施設1のほうが施設2より大，つまり，$r_1/k_1 > r_2/k_2$と仮定しておく。なお，以下の最適配置パターンを都心からの距離が連続的に増加する場合について図示すると図1のようになる。

図1 最適配置プロセス



(1)施設1は都心に一番近い地区から外側にむかって建設されはじめる。

(2)施設2は都心からかなり離れたある地区hより外側にむかってその内部に空地を混在させながら建設されて行く。この地区hは次の条件をみたす地区である。

$$\sigma(t^*_{1h-1}) < \left(1-\frac{r_2}{k_2}\Big/\frac{r_1}{k_1}\right)\sigma(T)\leqq\sigma(t^*_{1h}) \qquad (10)$$

ただしt^*_{1l} $(l=1,2,\ldots,n-1)$は $k_1D_1(t)=\sum_{j=1}^{l}S_j$ をみたすtである。

(3)その後施設1は施設2の内側にある空地を都心側から順次うめつくして行き，ある時刻$t^{**}_{1h}(\doteqdot t^*_{1h})$において施設2の一番内側と接する。

(4)したがってこの時刻までは両施設間には大きな空地が存在することになる。

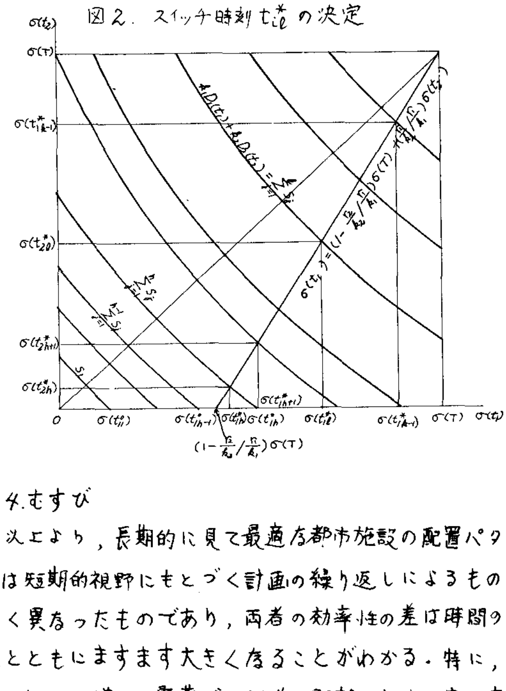
(5)この空地の大きさとその存在する期間は，計画期間Tが長い程大きく，$\frac{r_1}{k_1}$と$\frac{r_2}{k_2}$の差が大きいほど大きい。ただし，Tが無限大だとしても，ウエイト関数$\rho(t)$が時間とともに0に収束するかぎり，これらは有限な値をもつ。

(6)またこの空地の大きさは$\dot{D}_1(t)$が大きいほど大きい。

(7)施設1によって内側のこの空地がうめつくされた後は，施設1は施設2の内部に残されている空地を順次外側にむかってうめつくして行く。よってこれらの地区では両施設は混在して存在することになる。

(8)これら両施設混在の各地区$l(\geqq h)$において，施設$i(=1,2)$の建設が地区lから地区$l+1$にうつる時刻t^*_{il}は，図2において右下の斜めの直線と各曲線との交点として与えられる。

図2. スイッチ時刻t^*_{il}の決定



4.むすび

以上より，長期的に見て最適な都市施設の配置パターンは短期的視野にもとづく計画の繰り返しによるものと全く異なったものであり，両者の効率性の差は時間の経過とともにますます大きくなることがわかる。特に，施設の年々の増加の顕著で，便益の距離に対する変化率の異なる各種の施設を持つ都市ほど長期的計画視野にたった計画が必要であることがわかる。

なお本稿では，最適解の求め方や，再開発をも考慮した時の最適解については述べることができなかったが，これらについては講演時に発表する。

参考文献
1). M.R.Hestenes: "Calculus of Variation and Optimal Control Theory", John Wiley & Sons, 1966, PP.352-374
2). ポントリャーギン他著，関根訳，"最適過程の数学的理論"，総合図書，1967，PP.269-328.