Ⅳ-18　道路網探索に関する一考察

北大工学部　正員　○　桝谷有三

〃　〃　加来照俊

1. まえがき

道路網探索問題（ネットワーク問題）に対しては、いままで多くの研究がなされてきた。これらの多くの研究は、主に、ある制約条件（たとえば、道路延長，道路建設費用）のもとで目的関数（たとえば、総走行台キロ）を最大（小）にする問題として種々のアルゴリズムが提案されてきた。これらの研究に対して、本研究は、道路網の有効的な利用という事を考慮して、目的関数を道路利用者の費用と道路建設費用を加えた総費用とした。すなわち，すべてのノード間のOD交通量とノード間を結合する建設可能な最大の道路網から総費用が最小になる道路網（最大道路網の部分集合）の探索について考察を行なったものである。したがって、本モデルは以下に述る様にリンクに関する変数（0あるいは1）と各OD交通量の区間交通量を変数とする0－1混合整数計画問題（0－1 Mixed Integer Programming）（以下0－1 M.I.P.と呼ぶ）として定式化できる。さらに、0－1 M.I.P.の解法において計算の収束を早めるために道路網の強連結性についても考察を加えた。

2. 道路網探索モデルの定式化について

1)制約条件式について

いま、ある与えられた最大道路網をm個のノード（$n_i \in N$）とm個のアーク（$x_{ij} \in A$）をもつ有向グラフ（Digraph）G（N,A）にモデル化して考える。また，この道路網にg個のODペアが存在するものとする。各ODごとに番号をつけk番目のODの交通量をV_k，また、各ODごとにアークフローを区別しkなるODのアークフローをY^k_{ij}で表わす。さらに、各アークフローをそれぞれのOD交通量で割った単位アークフローをy^k_{ij}とすると　$y^k_{ij} = Y^k_{ij} / V_k \quad \binom{k=1,2,\cdots,g}{ij=1,2,\cdots,m}$ ―(1)　となる。そうすると，各ノードにおいてOD交通量の連続条件式(2)または(3)式を満足せねばならない。また、各アークの交通容量をC_{ij}として容量制限を考慮すると(4)式を満足しなければならない．さらに，各単位アークフローはすべて非負でなければならないことと(1)式より(5)式となる．

$$\sum_j \left(V_k \cdot y^k_{ij} - V_k \cdot y^k_{ji} \right) = \begin{cases} V_k \\ -V_k \\ 0 \end{cases} \quad ―(2) \qquad \sum_j \left(y^k_{ij} - y^k_{ji} \right) = \begin{cases} 1 & (i\text{が発ノードのとき}) \\ -1 & (i\text{が着ノードのとき}) \\ 0 & (i\text{が通過ノードのとき}) \end{cases} \quad \binom{k=1,\cdots,g}{i=1,\cdots,m-1} \quad ―(3)$$

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^{g} V_k \cdot y^k_{ij} \le C_{ij} \quad (ij=1,\cdots,m) \quad ―(4) \qquad X_{ij}\text{；全OD区間交通量}, \qquad 1 \ge y^k_{ij} \ge 0 \quad \binom{k=1,\cdots,g}{ij=1,\cdots,m} \quad ―(5)$$

次に，ノードとノードとの接続関係を示す隣接行列（Adjacency Matrix）を$\mathbf{X}$とする。この行列$\mathbf{X}$の要素x_{ij}はノードiとノードjが結ばれているとき1そうでないとき0をとる。したがって、x_{ij}はアークij（$x_{ij} \in A$）がある探索された道路網に含まれるとき1，そうでないとき0をとる変数である。そうすると(7)式となり、また、この変数x_{ij}と(5)式の変数y^k_{ij}との間に(8)式の関係が満足されなければならない．すなわち，(8)式は

$$\mathbf{X} = \{x_{ij}\} = \begin{array}{c|c} \text{ノード}\backslash\text{ノード} & \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad ―(6)$$

$$x_{ij} = 1 \text{ または } 0 \quad (ij=1,\cdots,m) \quad ―(7) \qquad 1 \ge x_{ij} - y^k_{ij} \ge 0 \quad \binom{k=1,\cdots,g}{ij=1,\cdots,m} \quad ―(8)$$

ある探索された道路網においてアークijが含まれれば変数y^k_{ij}は0と1の間の値を取り，含まれなければこのアークにOD交通は流れ得ないので0の値を取ることを意味する．

2)目的関数について

1.で述た様に本研究において目的関数として総費用（道路利用者の費用＋建設費用）を用いる．この際、それぞれの費用は、費用便益分析の手法で用いられている道路利用者の年間費用(R)と年間道路費用(H)とすると、(9)，(10)式の様に表わされる．また、総費用(T)は(11)式で表わされる．

$R=365\cdot k\cdot U\cdot\sum_{ij=1}^{m}X_{ij}\cdot t_{ij}$ —(9)　，　$H=K\cdot\sum_{ij=1}^{m}M_{ij}\cdot x_{ij}$ —(10)　，　$T=R+H$ —(11)

ここに，k；単位時間交通量を年平均日交通量に換算するための係数，U；時間当り運転経費，

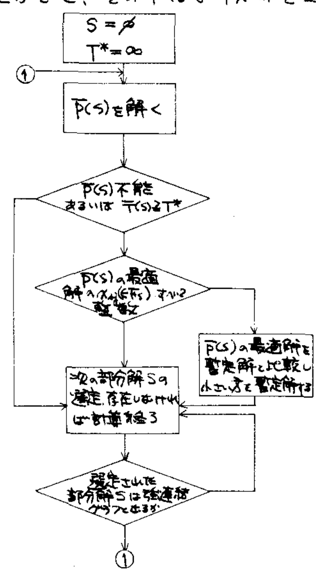
t_{ij}；アークijの走行所要時間，　K；資本回収係数，M_{ij}；アークijの建設費用

したがって，本モデルは(3),(4),(7),(8)式を制約条件として(11)式を目的関数とする0−1 M.I.P.となる．さらに，本モデルは総建設費用に制限がある問題に対しても(12)式を制約条件に含むことによって求めることができる．　$\sum_{ij=1}^{m}M_{ij}\cdot x_{ij}\leqq M$ —(12)　　M；総建設費用の上限

3．本モデルの解法アルゴリズムについて[1)]

本モデルの解法は分岐限界法（Branch and Bound Method）を用いて行なうことができ、そのアルゴリズムを図−1に示し、さらに、この図について若干の説明を加える．

変数x_{ij}のいくつかが0または1に固定された$A=\{x_{ij}\}$ $(ij=1,\cdots m)$の部分集合Sを部分解、Sにおいて固定された変数を固定変数とし，他の変数（自由変数）の集合をF_S（$A=S\cup F_S$，$S\cap F_S=\phi$）とする．2.で定式化された問題をPとし，この問題Pに対して自由変数のみを変数とする0−1 M.I.P.を$P(S)$，さらに，自由変数を　$0\leqq x_{ij}\leqq 1$　$(x_{ij}\in F_S)$ —(13)　の様に連続変数とした問題を$\overline{P}(S)$とする．1)　部分解Sを空集合，暫定解T^*を∞とする　2)　問題$\overline{P}(S)$をL.P.問題として解く　3)　L.P.問題$\overline{P}(S)$の最適解$\overline{T}(S)$を求める．4)　もし，問題$\overline{P}(S)$の変数x_{ij}がすべて0あるいは1であれば，それは問題Pに対する一つの可能解となる　5)　次に分岐させる部分解Sを選定する，もしなければ計算終了　6)　5)で選定された部分解Sは道路網（グラフ）を分離しないかどうかについて次節4.でのべる方法で検定する



図−1 道路網探索アルゴリズム

4．道路網（有向グラフ）の強連結性について[2),3)]

3.でのべた様にそれぞれ部分解Sを求めて計算を行なうが、部分解Sに含まれる変数のいくつかが0の値を取る時に，その後の計算でたとえすべての自由変数が1の値を取っても強連結グラフを生成しないことが明らかな場合がある．その時，$\overline{P}(S)$は明らかに不能となる．それ故，その部分解以後の計算をする必要がない．すなわち，部分解Sにおいて0なる値を取る変数x_{ij}に対応するアークijを最大道路網からグラフ理論でいう開放除去（open）した道路網に対しての強連結性の判定を次の手順で行なうことができる．1)　(6)式の隣接行列Xの−Xの第i対角要素をノードiに隣接するノードの個数$id(n_i)$でおきかえた行列をBとする．2)　行列Bの第j列の任意の要素の余因子B_{ij}は，ノードjをホームノードとしたトリーの個数に等しいのですべてのノード$(j=1,\cdots m)$に対してB_{ij}を求める　3)　もし，すべてのノードに対してB_{ij}の値が正であればすべてのノードから他のすべてのノードに到達可能すなわち強連結グラフとなる　4)　もし，あるノードに対してB_{ij}の値が0を取るものがあれば，このノードから他のすべてのノードに到達可能でなくなるので強連結グラフでない

$$\mathbf{B}=\{b_{ij}\}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}\quad\begin{pmatrix} b_{ii}=id(n_i) \\ b_{ij}=-x_{ij} \end{pmatrix} \text{—(14)}$$

以上有向グラフに対してのべたが，方向を考慮しない無向グラフに対しても同様な考えで行なうことができる．

5．あとがき

以上道路網探索問題に対して、本研究は0−1 M.I.P.として一つのアプローチを試みた．本モデルで求められる各ODの区間交通量は、走行時間を交通量に無関係に一定とした一種の輸送計画的配分の結果であり，また，目的関数として2つの費用の和と考えたが，これらの点については今後さらに検討しなければならない．本モデルの除雪路線網問題への適用，車線数をも考慮した問題などについても研究を進めていく．

1) Norman J. Driebeek ; Opens Res Vol 15-7 p576 ~p586　2) Harray ; Graph Theory　3) 飯田恭敬；土木学会論文集 No205 P121 ~P129