III-180　積分方程式による粘弾性地盤内の応力解析

京都大学工学部　正員　丹羽義次　正員　小林昭一　○正員　福井卓雄

近年，長大海底トンネルや地下発電所などの巨大な地中構造物が計画，施工されるようになり，そのような構造物周辺の応力，変形状態，特にこのような永続的構造物においてはその経年的な挙動をより適確に把握することが必須となってきた。一般に地盤はその内部に複雑な構造を持ち，簡単に単一の連続体モデルではその全ての挙動を表現し得ないものであるが，第一次近似的には弾性体もしくは線形な履歴法則に従う連続体と考えることができよう。ここでは地盤をモデル化して，線形粘弾性体と仮定し，モデルの線形性を生かして問題を積分方程式に帰着させて解析する。

線形粘弾性論の基礎方程式および境界条件

物体が等方均質で，かつ応力－ひずみ関係が線形履歴法則に従うものとする。(x_1, x_2, x_3) をEuclid空間の直交直線座標，t を時刻とし，$\epsilon_{ij}(x,t)$，$u_i(x,t)$，$\sigma_{ij}(x,t)$，$F_i(x,t)$ をそれぞれひずみ，変位，応力，物体力とする。このとき，ひずみの定義式，運動方程式，応力－ひずみの関係は（ρ は密度），

$$\epsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2}\left[u_{i,j}(t) + u_{j,i}(t)\right] \tag{1}$$

$$\sigma_{ij,j}(t) + F_i(t) = \rho\frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2} \quad , \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij}\int_{-\infty}^{t}\lambda(t-\tau)\frac{\partial\epsilon_{kk}(\tau)}{\partial\tau}d\tau + 2\int_{-\infty}^{t}\mu(t-\tau)\frac{\partial\epsilon_{ij}(\tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{3}$$

ここに，$\lambda(t)$，$\mu(t)$ は弾性論における Lamé 定数に対応する緩和関数で，不と反の原理より $-\infty < t < 0$ において　$\lambda(t) = \mu(t) = 0$　である。式(1)，(3) を(2) に代入すれば，場を支配する方程式が変位で表わされる。

$$\int_{-\infty}^{t}\mu(t-\tau)\frac{\partial u_{i,jj}(\tau)}{\partial\tau}d\tau + \int_{-\infty}^{t}\left[\lambda(t-\tau)+\mu(t-\tau)\right]\frac{\partial u_{j,ji}(\tau)}{\partial\tau}d\tau + F_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{4}$$

初期条件として自然状態を考える。初期条件および境界条件は．（n_j は境界における単位法線ベクトル）．

$$u_i(t) = \epsilon_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) = 0 \qquad -\infty < t < 0 \tag{5}$$

$$T_i(t) = \sigma_{ij}(t)\,n_j = S_i(t) \qquad B_\sigma \text{ 上で} \tag{6}$$

$$u_i(t) = \Delta_i(t) \qquad B_u \text{ 上で} \tag{7}$$

基礎方程式の Laplace 変換

式(5) を考慮に入れた上で 式(4)，(6)，(7) を時間 t について Laplace 変換する。

　一般に　　$\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

　特に，　　$\bar{\lambda}(s) = s\mathcal{L}[\lambda(t)]$　，　$\bar{\mu}(s) = s\mathcal{L}[\mu(t)]$

と定義すれば，場の方程式(4) は，

$$(L_{ij} - s^2\delta_{ij})\bar{u}_j(x,s) \equiv \frac{\bar{\mu}(s)}{\rho}\bar{u}_{i,jj}(x,s) + \frac{\bar{\lambda}(s)+\bar{\mu}(s)}{\rho}\bar{u}_{j,ji}(x,s) - s^2\bar{u}_i(x,s) = -\frac{1}{\rho}\bar{F}_i(x,s) \tag{8}$$

特に負荷がゆるやかで、慣性項を無視できるときは、問題は準静的になって

$$\mathbb{L}_{ij}\bar{u}_j(x,s) = -\frac{1}{\rho}\bar{F}_i(x,s) \tag{9}$$

境界条件は

$$B_\sigma \text{上で}\quad \bar{T}_i(s) = \bar{\sigma}_{ij}(s)n_j = \bar{S}_i(s)\ ,\qquad B_u \text{上で}\quad \bar{u}_i(s) = \bar{\Delta}_i(s) \tag{10,11}$$

<u>相反公式，基本解，積分方程式</u>

$\bar{u}_i(x)$, $\bar{v}_i(x)$ が領域D内部および境界B上において，C^2級の関数であるとき，Betti の相反公式に対応して，次の相反公式が成り立つ．

$$\int_D(\bar{u}_i\mathbb{L}_{ij}\bar{v}_j - \bar{v}_i\mathbb{L}_{ij}\bar{u}_i)\,dV = \int_B(\bar{u}_i\mathbb{T}^n_{ij}\bar{v}_j - \bar{v}_i\mathbb{T}^n_{ij}\bar{u}_j)\,dS \tag{12}$$

ここに，$\mathbb{T}^n_{ij}\bar{u}_j = \bar{\sigma}_{ij}(\bar{u})n_j = \bar{\lambda}\,n_i\bar{u}_{j,j} + \bar{\mu}\,n_j(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$ (13)

基本特異解とは次の方程式を満足する $\Gamma_i^{(k)}(x;y)$ をいう．

$$(\mathbb{L}_{ij} - s^2\delta_{ij})\Gamma_j^{(k)}(x;y) = -\delta(x-y)\delta_i^k \tag{14}$$

二次元の場合

$$\Gamma_i^{(k)}(x;y) = A(\psi\delta_{ik} - \chi r_{,i}r_{,k}) \tag{15}$$

ここに，$A = \dfrac{1}{4\pi\rho c_2^2}$, $\psi = K_0\left(\dfrac{sr}{c_2}\right) + \dfrac{c_2}{sr}\left[K_1\left(\dfrac{sr}{c_2}\right) - \dfrac{c_2}{c_1}K_1\left(\dfrac{sr}{c_1}\right)\right]$, $\chi = K_2\left(\dfrac{sr}{c_2}\right) - \dfrac{c_2^2}{c_1^2}K_2\left(\dfrac{sr}{c_1}\right)$

$r = \sqrt{[(x_i-y_i)(x_i-y_i)]}$, $c_1 = \bar{\mu}(s)/\rho$, $c_2 = [\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)]/\rho$

K_n は n 次の変形 Bessel 関数．

準静的な場合には式(9)について同様に

$$\mathring{\Gamma}_j^{(k)}(x;y) = \mathring{A}(\mathring{\psi}\delta_{jk} - \mathring{\chi}r_{,j}r_{,k}) \tag{16}$$

ここに，$\mathring{A} = \dfrac{1}{4\pi(\bar{\lambda}+2\bar{\mu})\bar{\mu}}$, $\mathring{\psi} = (\bar{\lambda}+3\bar{\mu})\log r$, $\mathring{\chi} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}$

式(12)の $\bar{u}_i$ に $(\mathbb{L}_{ij}+s^2\delta_{ij})\bar{u}_j(x)=0$ を満足する関数 $\bar{u}_i(x)$ を，$\bar{v}_i$ に式(14)を満足する関数 $\Gamma_i^{(k)}(x;y)$ を代入すると，

$$F(y)\,\bar{u}_k(y) = \int_B[\Gamma_i^{(k)}(x;y)\,\bar{T}_i(x) - \tilde{\Gamma}_{ki}^{(k)}(x;y)\,\bar{u}_i(x)]\,dS_x \tag{17}$$

ここに，$F(y) = 0\ \{y\in(\overline{D+B})\}$, $\frac{1}{2}\ \{y\in B\}$, $1\ \{y\in D\}$, $\tilde{\Gamma}_{ki}^{(k)}(x;y) = \mathbb{T}^x_{ij}\Gamma_j^{(k)}(x;y)$

式(17)は，$y\in B$ のとき，境界上の $\bar{u}_i(x)$, $\bar{T}_i(x)$ に関する関係式である。従って，境界上で $\bar{u}_i(x)$ もしくは $\bar{T}_i(x)$ が与えられているとき，未知の $\bar{T}_i(x)$ もしくは $\bar{u}_i(x)$ に関する積分方程式を与える。

境界上の $\bar{u}_i$, $\bar{T}_i$ がすべて定まれば，式(17)で $y\in D$ として内部の値を求めることができる。最終的な解は求まった $\bar{u}_i$, $\bar{\sigma}_{ij}$ を Laplace 逆変換することにより得られる。