III-149 Griffithの脆性破壊理論に関する二,三の拡張

山梨大学・工学部 正員 平島 健一
前田建設(株) 正員 ○甲斐荘正晴

1. はじめに.

Griffithの脆性破壊理論においては,材料は等質等方性の線型弾性体であり,その内部に偏平な楕円クラックがat randomな方向をもって先在し,そのクラックの先端付近の引張応力が一定値に達したときに破壊が生じるとする。[1] この Griffith 理論を層状性岩石のような異方性材料に適用することが幾人かの研究者によってなされている。それらを大別すると (a) 力学的には等方性であるがnon-randomなクラックの分布をしている,あるいは (b) 力学的に異方性である,とする観点に立つ研究に区別される。前者に属するものとして Walsh & Brace[2], Hoek[3] および小林[4] の研究をあげることができる。また,後者に属するものとしては平島・丹羽[5] の形式解がある。ここではGriffithの脆性破壊理論をつぎのような場合,すなわち

[1] 二次元的なクラックを有する異方性材料

[2] 面外方向(中間主応力方向)に傾斜したクラックを有する等方性ならびに異方性材料

への拡張を試み,具体的な弾性定数,組み合せ主応力値を与えて計算した幾つかの結果を例示する。

2. 二次元的なクラックを有する異方性体への拡張

Fig. 1

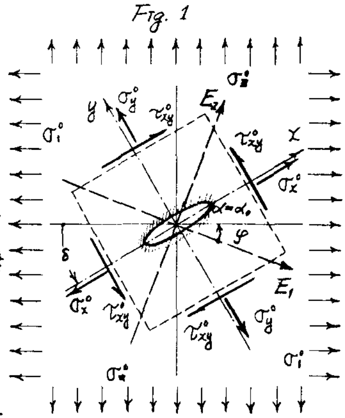


Fig. 1 に示すように中間主応力 σ_2 の作用面(紙面)に垂直な,いわゆる二次元的な偏平クラック ($a \gg b$) の周縁の長軸 (i.e. x 軸) 近傍での応力 σ_θ は次式で近似される。[5]

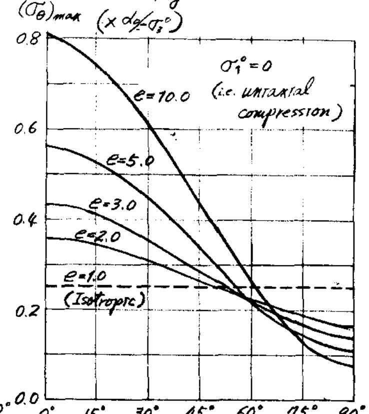
$$\sigma_\theta \doteq -I_m\left[\frac{\xi\theta^3+(2\xi-1)\alpha_0^2\theta+\eta\alpha_0^3}{(\theta^2+\alpha_0^2)(\theta^2-\eta\alpha_0\theta+\xi\alpha_0^2)}\sigma_y^\circ+\frac{\eta\theta^3+(2-\xi)\alpha_0\theta^2+\alpha_0^3}{(\theta^2+\alpha_0^2)(\theta^2-\eta\alpha_0\theta+\xi\alpha_0^2)}\tau_{xy}^\circ\right] \quad \cdots\cdots (1)$$

いま,最大・最小応力が生じるクラック周縁の位置を求めるためには,上式を θ に関して微分して zero とおけばよく,その結果は次式のような10次の複素係数の代数方程式となる。

$$I_m\left[\sum_{j=0}^{10}\lambda_j\hat{\theta}^{10-j}\right]=0, \quad \hat{\theta}=\theta/\alpha_0 \quad \cdots\cdots (2)$$

ここに係数 λ_j ($j=1,2,\cdots,10$) は作用応力 σ_y°, τ_{xy}°, 異方性弾性定数, 特性方程式の根 μ_1, μ_2 などに関係する複素定数である。

Fig. 2 (a)



したがって(2)式を解き,それらの値を(1)式に代入することによって,異方性体内のクラック周縁での最大引張応力値を求めることが可能である。具体例として直交異方性体を例にとり,主弾性係数 (E_1) 軸の傾き φ, 主弾性係数比 e ($=E_1/E_2$) をパラメータとして, at random なクラック方向に対して最も大きな引張応力の値を求めてプロットしたものが Fig. 2 (a), (b) である。

Fig. 2 (b)

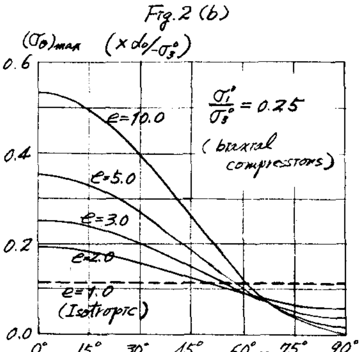


Fig. 2 (a) は一軸圧縮荷重 ($\sigma_1^\circ=0, \sigma_3^\circ<0$) が作用する場合であり, Fig. 2 (b) は側

方荷重応力σ_1°が$\sigma_1^\circ/\sigma_3^\circ=0.25$の比率で作用するような二軸圧縮荷重状態の場合の一例である。図中には$e=1.0$すなわち等方性体の場合の$(\sigma_\theta)_{max}$も示されている。この場合は、当然のことながら主弾性軸の傾きφに対して一定値をとる。Griffithによれば、等方性体の場合$\alpha_0(\sigma_\theta)_{max}$がある一定値に達したときに破壊が生じるとするのであるから$\alpha(\sigma_\theta)_{max}$が大きいのは、破壊の可能性が高いことを意味するものである。Fig.2より、ここで取り扱っているような異方性体の場合、最小主応力(σ_3°)軸方向に対して主弾性軸(E_1)方向が垂直(i.e. $\varphi=0$)のとき$(\sigma_\theta)_{max}$は最も大きく、平行(i.e. $\varphi=90^\circ$)のとき最も小さな値をとることがわかる。この他の主応力比$\sigma_1^\circ/\sigma_3^\circ$の場合にも同様の傾向を示している。異方性体の場合には等方性において考えたような$\alpha_0(\sigma_\theta)_{max}=K_0$(=一定)とすることには問題があり、$K_0=K_0(\varphi,e)$のような関数と考えるのが妥当であろう。なお上記の計算例では$\nu_{12}=0.150$, $1/G_{12}=1/E_1+1/E_2+2\nu_{12}/E_1$を仮定して求めたものである。

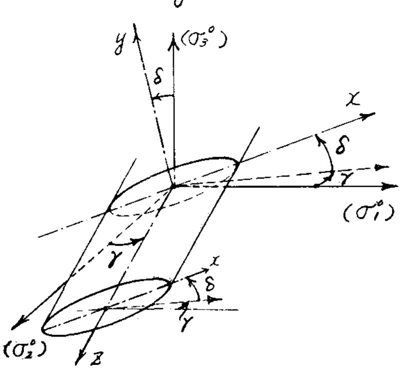
3. 面外傾斜のクラックを有する等方性および異方性体への拡張

ここでは、Fig.3のようにz軸方向に充分に長い偏平クラック($a \gg b$)の無限遠より三主応力$\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ$が作用した場合、クラックの母線方向(z軸方向)が中間主応力σ_2°の方向に対して角度γ傾いた状態を想定し、このクラックの周縁における最大応力の生じる位置を求める。この最大応力はクラック面内の直応力σ_θと面外せん断応力$\tau_{\theta z}$の合成応力σ_nとして求められるものである。すなわち、

$$\tau_{\theta z} = -\frac{\tau_{yz}^\circ}{\sqrt{\theta^2+\alpha_0^2}}\, I_m\left[\frac{\mu_3\theta+\alpha_0}{\theta-\mu_3\alpha_0}\right] \cdots\cdots (3)$$

$$\sigma_n=\frac{1}{2}\left\{\sigma_\theta+\sqrt{\sigma_\theta^2+4\tau_{\theta z}^2}\right\} \cdots\cdots (4)$$

Fig. 3



なお、σ_θは前節の(2)式で与えられた式を用いればよい。したがって、(4)式をθで微分してzeroとおけば、

$$\tau_{\theta z}\frac{d\tau_{\theta z}}{d\theta}\left(2\sigma_\theta\frac{d\sigma_\theta}{d\theta}+3\tau_{\theta z}\frac{d\tau_{\theta z}}{d\theta}\right)=0 \cdots\cdots (5)$$

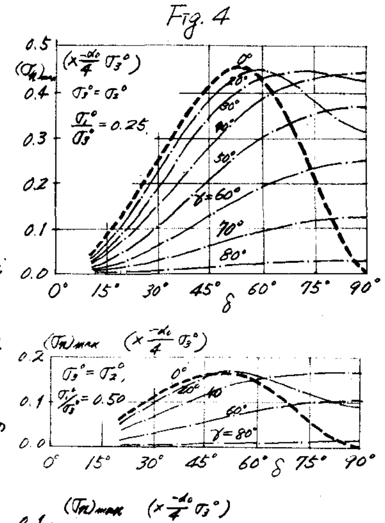
ここに、

$$\frac{d\tau_{\theta z}}{d\theta}=\frac{\tau_{\theta z}\cdot\hat{\theta}}{(\hat{\theta}^2+1)^{\frac{3}{2}}}\, I_m\left[\frac{\mu_3^2+\hat{\theta}(\hat{\theta}^2-1)\mu_3+2(\hat{\theta}^2+1)}{\alpha_0\hat{\theta}(\hat{\theta}-\mu_3)^2}\right] \cdots\cdots (6)$$

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta}=-I_m\left[\frac{\sum_{k=0}^{6}\omega_k\hat{\theta}^{6-k}}{\alpha(1+\hat{\theta}^2)(\hat{\theta}-\mu_1)(\hat{\theta}-\mu_2)}\right] \cdots\cdots (7)$$

が得られる。(5)式より極値をとるときのθを求め、そのθを(4)式に代入して$(\sigma_n)_{max}$を計算することが可能である。いま、計算例として等方性体の場合について$(\sigma_n)_{max}$を求めた結果の一例を図示したものがFig.4である。面外傾斜角γをパラメータとして、σ_nの最大値をプロットしたものであり、$\gamma=0^\circ$の特別な場合(図中に点線で示した曲線)は、当然のことながら、Griffithによって求められたものと完全に一致している。したがって、この点線の曲線より上部に出ている曲線(一点鎖線)部分は面外傾斜のクラックによって破壊が生じることを意味している。

Fig. 4



4. むすび

その他の計算例、実際の岩石破壊実験との比較検討、従来の破壊理論との関係等については当日発表する。

参考文献: 1) A. A. Griffith, First Int. Cong. Appl. Mech, 55 (1924), 2) J. B. Walsh and W. F. Brace, Jour. Geophys. Res., 69, 3449 (1964), 3) E. Hoek, J. South African Inst. Min. and Met., 1, 501 (1964), 4) S. Kobayashi, Mem. Fac. Eng., Kyoto Univ. 32, 307 (1970), 5) K. Hirashima and Y. Niwa, Int. Conf. Mech. Behavior Materials, Abstracts, 2-1, 154 (1971)