III-107　円錐角をもつ杭の支持力（その２）

名城大学理工学部　正会員　柴田道生
名城大学理工学部 ○正会員　阿河武志

1）　まえがき

（その１）は振動から先端支持力を論じたが、今回は、杭本体と杭先端の伝播速度の違いと、先端形状率（$n\sqrt{\alpha t \log \frac{S_2}{S_1}}$）、$\alpha$＝効率、$t=\frac{l}{a}$＝時間を使用して、上昇波と下降波で、任意の時間における歪量、応力を求めて、又、著者の１人が導いた円錐角を持つ杭の動的公式を用いて支持力を計算したものである。

2）　円錐角をもつ杭の方程式は下書のとおりである。

$$\overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{①}\underbrace{-n^2 u\Big)}_{②} \quad \cdots (1)$$

①は杭本体、②は杭先端　　$a^2=\frac{Eg}{\gamma}$

$$u_1=f_1(at-x)+f_2(at+x) \quad \cdots (2)$$

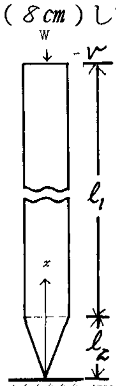
$$u=f_1(a\sqrt{t^2+n^2}-x)+f_2(a\sqrt{t^2+n^2}+x) \quad \cdots (3)$$

$u(x,t)$＝杭の縦変位、E＝杭の弾性係数
t＝時間、x＝位置、g＝重力の加速度、γ＝単位容積重量、n＝形状率、但し$n=\sqrt{\alpha t \log \frac{S_2}{S_1}}$
α＝効率、f_1＝下降波、f_2＝上昇波、S_1, S_2＝上部下部の断面積、又、先端部をカット（8cm）して近似的に円錐部と仮定する。

図－１において、杭頭部に重さWのハンマーが$-v$の速度で衝突したとき、杭頭では、ハンマーの慣性力に等しい力が発生する。

$$AE\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)=\frac{W}{g}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big) \cdot (4)$$

$$AE\Big(\frac{\partial u}{\partial x}-n^2\Big)=\frac{W}{g}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big) \cdot (5)$$



図－１

ハンマーの重さWを杭の重$A\gamma l$との比をmとすると$m=\frac{W}{A\gamma l}$、従って

$$ml\Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\Big)=-a^2\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big) \quad \cdots (6)$$

$$ml\Big(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\Big)=-a^2\Big(\frac{\partial u_2}{\partial x}-n^2\Big) \quad \cdots (7)$$

3）　初期条件

図－１より、杭の頭部に衝撃を受けると

杭本体では　$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=l_1, t=0}=-v$　$\cdots (8)$

杭先端では　$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=l_2, t=0}=-\frac{v}{\sin\theta}$　$\cdots (9)$

4）　下降波の決定

a）杭本体の場合

（６）式に（２）式を代入して、$at+x=z$とおくと

$$f_1''(z)+\frac{1}{ml}f_1'(z)=-f_2''(z-2l)+\frac{1}{ml}f_2'(z-2l) \quad (10)$$

$$f_2''(z-2l)+\frac{1}{ml}f_2'(z-2l)=P_z$$

$$f_1'(z)+\frac{1}{ml}f_1''(z)=P_z \quad \text{------}(11)$$

（11）式の一般的は

$$f_1'(z)=e^{-\frac{z}{ml_1}}\Big(\int e^{\frac{z}{ml_1}}P_z\,dz+C\Big) \quad \text{-----}(12)$$

$x=l_1$で$z=l_1$は衝突を意味し、$x=0$で下降波が達するから$z<l$では下降波は存在しないから

$$P_z=0 \text{ で，} f_1'(z)=Ce^{-\frac{z}{ml_1}} \quad \text{-----}(13)$$

積分常数は（６）式と$x=l_1$で$z=l_1$と$z<l_1$で決定すると　$f_1'(z)=\frac{v}{a}e^{-\frac{z}{ml_1}}$　-----(14)

$f_1(z)$は(14)式を積分して、積分常数を(10)式の条件で

$$f_1(z)=\frac{mlv}{a}\Big(e^{-\frac{z-l_1}{ml_1}}-1\Big) \quad \text{-----}(15)$$

b）杭先端部の場合

（７）式に（３）式を代入して、$a\sqrt{t^2+n^2}+x=z$とおくと

$$f_1'(z)=-\frac{v}{a\sin\theta}e^{-\frac{z-l_2}{ml}} \quad \text{-----}(16)$$

$$f_1(z)=-\frac{v}{a\sin\theta}\Big(e^{-\frac{z-l_2}{ml_2}}-1\Big) \quad \text{-----}(17)$$

5）　上昇波の決定

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=ku \quad \text{-----}(18)$$

但し、k＝地盤係数

a）杭本体の場合

(18)式に（２）式を代入してみると

$$f_1'(at+x)-f_2'(at-x)=k\{f_1(at+x)-f_2(at-x)\} \quad \text{-----}(19)$$

ところで、$z=at+x$と置き$x=0$、$at=z$であるから

$$f_2'(z)+kf_2(z)=f_1'(z)-kf_1(z) \quad \text{----}(20)$$

$f_1'(z)-kf_1(z)=Q_z$とおくと

$$f_2'(z)+kf_2(z)=Q_z \quad \text{-----}(21)$$

一般解は

$$f_2(\xi)=e^{-k\xi}\left(\int e^{k\xi}Q_\xi d\xi+C\right)\quad\cdots(22)$$

または、Q_ξは、（12）式と（15）式を代入して、

$f_1(at)+f_2(at)=0$と（22）式とで連続性を用いて、

$ml_1k=\alpha$とおくと、

$$f_2(\xi)=\frac{mlv}{a}-\frac{mlv}{a}\frac{\alpha+1}{\alpha-1}e^{-\frac{\xi-l_1}{ml_1}}+\frac{mlv}{a}\frac{2}{\alpha-1}e^{-k(\xi-l_1)}\quad\cdots(23)$$

（23）式を微分すると $f_2'(\xi)$ が求まる。

$$f_2'(\xi)=\frac{v}{a}\frac{\alpha+1}{\alpha-1}e^{-\frac{\xi-l_1}{ml_1}}-\frac{v}{a}\frac{2\alpha}{\alpha-1}e^{-k(\xi-l_1)}\cdots(24)$$

b ）杭先端部の場合

（18）式に（ 3 ）式を代入して

$$f_1'(a\sqrt{t^2+n^2}+x)-f_2'(a\sqrt{t^2+n^2}-x)=k\{f_1(a\sqrt{t^2+n^2}-x)+f_2(a\sqrt{t^2+n^2}+x)\}\quad\cdots(25)$$

ところで、$\xi=a\sqrt{t^2+n^2}+x$と置くと、$x=0$、

$a\sqrt{t^2+n^2}=\xi$ である。

$$f_2(\xi)'=\frac{mlv}{a\sin\theta}-\frac{mlv}{a\sin\theta}\frac{\alpha+1}{\alpha-1}e^{-\frac{\xi-l_2}{ml_2}}+\frac{mlv}{a\sin\theta}\frac{2}{\alpha-1}e^{-k(\xi-l_2)}\cdots(26)$$

$$f_2'(\xi)'=\frac{v}{a\sin\theta}\frac{\alpha+1}{\alpha-1}e^{-\frac{\xi-l_2}{ml_2}}-\frac{v}{a\sin\theta}\frac{2\alpha}{\alpha-1}e^{-k(\xi-l_2)}\quad\cdots(27)$$

6 ） 任意の時間の応力

図－1に示すように のハンマーが－ の速度で、杭頭に衝撃を与えて貫入せしめる場合、時間の経過による杭先端の伸び（歪）を計算する。

杭頭で発生した衝撃波が杭先端に達する時間 tは $t=\frac{l}{a}$ 後である。この時、杭先端では下降波のみであるから、先端伸び（歪）は（16）式より

$a\sqrt{t^2+n^2}+x=\xi$ とおいて $x=l$ 、$t=\frac{l}{a}$ では$\xi=l$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\t=\frac{l}{a}}}=f_1'(\xi)=-\frac{v}{a\sin\theta}\quad\cdots(28)$$

また、三角級数の振動方程式によると

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)_{x=0}=\frac{4v}{\pi a\sin\theta}\sum\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi at}{2l\sin}\cdots(29)$$

また、地盤係数（ $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}=k$

$$v=ak\sin\theta\quad\cdots(30)$$

よって（28）式は、

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\t=\frac{l}{a}}}=-\frac{v}{a\sin\theta}=\frac{ak\sin\theta}{a\sin\theta}=k_0\cdots(31)$$

（31）式から、下降波は上昇波の影響を受けず剪断抵坑のみである。

応力は $=f_1(\xi)+f_1(\xi)'-\{f_2(\xi)+f_2'(\xi)\}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}=\frac{v}{a}\left\{-e^{-\frac{\xi-l_1}{ml_1}}-\frac{\alpha+1}{\alpha-1}e^{-\frac{\xi-l_1}{ml_1}}+\frac{2\alpha}{\alpha-1}e^{-k(\xi-l_1)}\right\}+\frac{v}{a\sin\theta}\left\{-e^{-\frac{\xi-l_2}{ml_2}}-\frac{\alpha+1}{\alpha-1}e^{-\frac{\xi-l_2}{ml_2}}+\frac{2\alpha}{\alpha-1}e^{-k(\xi'-l_2)}\right\}\cdots(32)$$

$t=\frac{2l}{a}$では、本体$=\xi=at=2l$、先端$=\xi'$

$$\xi'=a'\sqrt{\frac{2l\mu}{2\xi}\left\{1+\left(0.7^2\log\frac{\xi-\xi_1}{\xi_1}\right)^2\right\}}=2l_1\sqrt{1+\left(0.7\log\frac{\xi}{\xi_1}\right)}$$

（32）式にξ,ξ'を代入して

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\t=\frac{2l}{a}}}=\frac{v}{a}\left\{-e^{-\frac{1}{m}}-\frac{\alpha+1}{\alpha-1}e^{-\frac{1}{m}}+\frac{2\alpha}{\alpha-1}e^{-kl_1}\right\}+\frac{v}{a\sin\theta}\left\{-e^{-\frac{\xi'}{m}}-\frac{\alpha+1}{\alpha-1}e^{-\frac{\xi'}{m}}+\frac{2\alpha}{\alpha-1}e^{-k(\xi'-l_2)}\right\}\quad\cdots(33)$$

（33）式のように、本体 $t=\frac{3l}{a}\sim t=\frac{11l}{a}$ この計算を表－1に示す。

7 ） 計算式の条件

条件は文献①で計算したものである。但し、杭中を伝播する衝撃波の速度 $a=\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}=4000$m/sec、杭先端では $a'_{30^\circ}=2000$m/sec 、$a'_{60^\circ}=3400$m/sec 、$\alpha_{30^\circ}=0.7$ $\alpha_{60^\circ}=0.6$ また、動的公式が円錐角を考慮した公式は、現在、著者らの一人である柴田公式しかないので、この式を用いて、支持力を計算した。

$$R=\frac{W+w}{g}\frac{\left(\frac{ef\,W\mu}{W+w}\right)^2\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{2\{AE\mu_0-(W+w)L\}}{AE}}+(W+w)$$

但し、許容支持力 Raは $Ra=\frac{1}{3}R$

先端 歪・応力 時間	$2\lambda=30^\circ$		$2\lambda=60^\circ$	
	歪量	応力	歪量	応力
$t=\frac{l}{a}$	-31×10^{-6}	-9.000^t	-20×10^{-6}	-6.000^t
$t=\frac{2l}{a}$	-1709×10^{-8}	-4.956^t	-1059×10^{-8}	-3.071^t
$t=\frac{3l}{a}$	-1757×10^{-8}	-5.095^t	-1040×10^{-8}	-3.016^t
$t=\frac{4l}{a}$	-1755×10^{-8}	-5.089^t	-1022×10^{-8}	-2.963^t
$t=\frac{5l}{a}$	-1746×10^{-8}	-5.072^t	-1004×10^{-8}	-2.911^t
$t=\frac{6l}{a}$	-1757×10^{-8}	-5.095^t	-987×10^{-8}	-2.860^t
$t=\frac{7l}{a}$	-1727×10^{-8}	-5.008^t	-970×10^{-8}	-2.813^t
$t=\frac{8l}{a}$	-1681×10^{-8}	-4.889^t	-953×10^{-8}	-2.763^t
$t=\frac{9l}{a}$	-1651×10^{-8}	-4.787^t	-936×10^{-8}	-2.714^t
$t=\frac{10l}{a}$	-1609×10^{-8}	-4.666^t	-920×10^{-8}	-2.668^t
$t=\frac{11l}{a}$	-1583×10^{-8}	-4.590^t	-904×10^{-8}	-2.621^t

表－1

参考文献

① 円錐角をもつ杭の支持力（その 1 ）第８回土質工学発表、昭和４８年
② 打撃荷重による管杭の頭部変形の研究：運輸技術研究所報告：（第１２巻２号）鈴内克洋
③ 杭の貫入と支持力に関する研究：柴田道生
④ 衝撃塑性学：コロナ社・黒崎永治 訳