III-47 粒状体の降伏条件に関する一提案

東北大学工学部　正員　佐武正雄

1．まえがき

三つの主応力$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$を座標軸とする３次元空間（ここでは主応力空間と呼ぶ）に距離の概念を導入すると従来の多くの降伏条件には、その応力点に関するある距離がある大きさに達すると降伏がおこるという幾何学的解釈を与えることができる。[1] さらに Minkowsky の距離と異った新しい距離を導入すると Mohr－Coulombの条件を含む一連の降伏条件が得られるが、その中から実験によって研究されている砂などの降伏条件[2)3)]とよく合致した傾向をもつものを求めることができる。本文は、その誘導の過程やこの降伏条件のもつ性質・意味などについて述べる。

2．応力空間における新しい距離の定義とこれから導びかれる降伏条件

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \geq 0$（圧縮を＋）と仮定する。いま、応力空間の２点$P_1$ $(\sigma_{1_1}\sigma_{2_1}\sigma_{3_1})$，$P_2$ $(\sigma_{1_2}\sigma_{2_2}\sigma_{3_2})$に対して次のような距離を定義する。

$$d_n(P_1P_2) = \sqrt[n]{\left|\frac{\sigma_{1_1}-\sigma_{1_2}}{\sigma_{1_1}+\sigma_{1_2}}\right|^n + \left|\frac{\sigma_{2_1}-\sigma_{2_2}}{\sigma_{2_1}+\sigma_{2_2}}\right|^n + \left|\frac{\sigma_{3_1}-\sigma_{3_2}}{\sigma_{3_1}+\sigma_{3_2}}\right|^n} \qquad (2\cdot1)$$

この定義が距離の公理[1]を満足していることは容易に示すことができる。この定義によれば、原点 O からの任意の点 P（≠O）までの距離 d(OP) は$\sqrt[n]{3}$となっている。さて文献 1）の場合と同様に、点 P について、静水圧軸 ρ $(\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3)$ に垂直な平面 π上にある図－／に示すような正三角形P P^*P^{**}を考えれば、その一辺の長さは

$$d_n(PP^*) = \sqrt[n]{\left|\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right|^n + \left|\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_2+\sigma_3}\right|^n + \left|\frac{\sigma_3-\sigma_1}{\sigma_3+\sigma_1}\right|^n} \qquad (2\cdot2)$$

であり、この長さがある一定値に達するとき降伏がおこると考えれば、次式のような降伏条件が得られる。

$$\sqrt[n]{\left|\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right|^n + \left|\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_2+\sigma_3}\right|^n + \left|\frac{\sigma_3-\sigma_1}{\sigma_3+\sigma_1}\right|^n} = \sqrt[n]{2}\,k \qquad (2\cdot3)$$

（軸対称応力の場合、n に拘らず同一条件となるように$\sqrt[n]{2}\,k$とおいている）

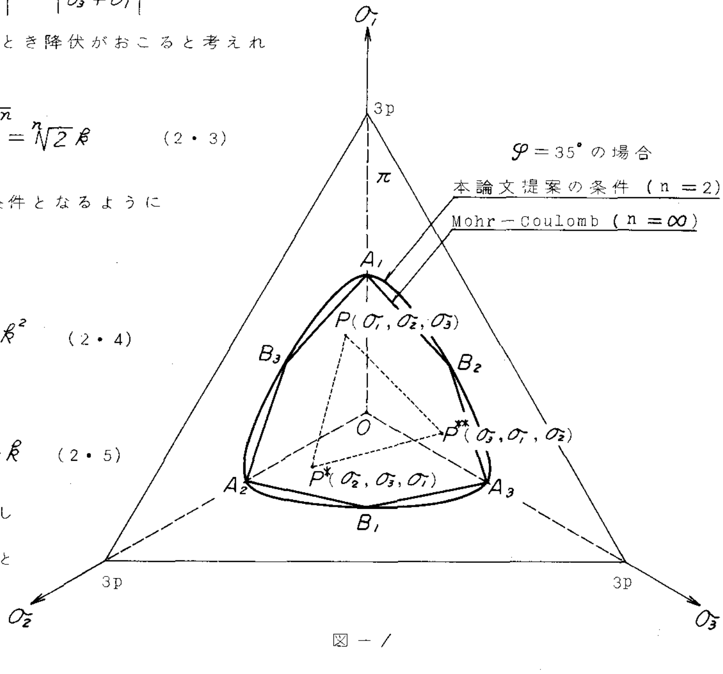
とくに n＝2 の場合

$$\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_2+\sigma_3}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{\sigma_3+\sigma_1}\right)^2 = 2k^2 \qquad (2\cdot4)$$

n＝∞の場合

$$Max\left[\left|\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right|, \left|\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_2+\sigma_3}\right|, \left|\frac{\sigma_3-\sigma_1}{\sigma_3+\sigma_1}\right|\right] = k \qquad (2\cdot5)$$

となり、後者はMohr－Coulomb の条件として知られているものである。（2・4）式と（2・5）式の関係は von Misesの条件と Tresca の条件の関係[1]と類同であり、



図－／

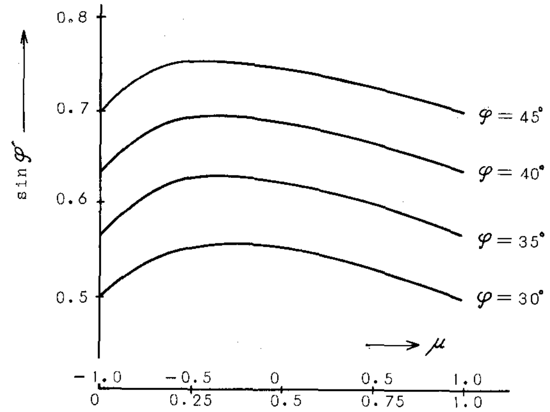
（2・4）式には、（2・5）式のMohr－Coulomb条件で考慮されていない中間主応力の影響が考慮され、力学的にはエネルギー的考慮がなされているということができる。

3．粒状体の降伏条件としての考察

Mohr－Coulombの条件（2・5）式では通常

$$k = \sin\varphi \qquad (\varphi：内部摩擦角) \qquad (3・1)$$

とおく。（2・4）式にもこのkを用いれば、その降伏曲面はMohr－Coulombの６角すいより、やや外側にふくらみをもつすい面となり、平面による切り口は図－／に示すようになる。一方、実験による研究からも同様の結果が得られており[2)3)]（2・4）式は砂などの降伏条件として用いるのに適合したものではないかと考えられる。



図－２

図－２は $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ の場合について横軸にLode のパラメーター $\mu = \frac{2\sigma_2-\sigma_3-\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_3}$（および $b=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}$）をとり、縦軸にせん断抵抗 $\sin\varphi' = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}$ をとってその変化を図示したものである。グラフはBishop[4)]の提案した修正式 $\sin\varphi' = \frac{K_1}{1-K_2\sqrt{b(1-b)}}$ のような対称性を示していない。また、Max $\sin\varphi'/\sin\varphi \fallingdotseq 1.1$ となるが、Sutherland[3)]の実験結果もほぼ同一の値となっている。

諸戸[5)]は砂の変形の際の状態関数についての考察から（2・4）式の降伏条件式のもつ力学的意味の説明を試みている。砂の状態関数を、２次元の場合の類推から

$$\Phi = v + \int\sum\eta_i\, d\gamma_i \qquad (3・2)$$

ただし、$v = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$、$\eta_1 = \left|\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_2+\sigma_3}\right|$ 等、$\gamma_1 = |\varepsilon_2-\varepsilon_3|$ 等、とおく。第２項はせん断ヒズミエネルギーそのものではないが、類似の性格をもつ項である。第／項の体積変化の項をさらに $v = f(p) + d(\eta_i)$，$p = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$ と分解する。この第２項はダイレイタンシーの項である。$d(\eta_i) = -D\sum\eta_i^2$，また $\eta_i = g\gamma_i$ の仮定を入れると

$$\Phi = f(p) + \left(\frac{2}{g}-D\right)\sum\eta_i^2 \qquad (3・3)$$

が得られる。降伏がpの関数の項 $f(p)$ には関係しないと考えると、せん断ヒズミエネルギーに類似の項とダイレイタンシーの項が残り、これはちょうど（2・4）式の左辺の形になつている。従って粒状体の降伏はこの２項に関連しておこることが推定される。

4．あとがき

応力空間に新しい距離概念を導入することにより、Mohr－Coulombの条件を含む一連の降伏条件が得られ特にn ＝2 の場合が砂などの粒状体の降伏条件として適用できることを提案した。この種の降伏条件は異方性の考慮も容易であり、また岩石などにも適用可能ではないかと考えられる。降伏条件がなぜ距離の概念と結びつくか、興味ある問題であると思う。

参考文献

1) 佐武正雄：応力空間における距離の概念と降伏条件に関する考察，土木学会第27 回年次学術講演会講演概要集第1 部（1972），253－254

2) Kirkpatrick,W.M.: The Condition of Failure for Sands, Proc. 4th Int. Conf. SMFE 1 (1957),172－178

3) Sutherland,H.B.: The Influence of the Intermediate Principal Stress on the Strength of Sand, Proc. 7th Int. Conf. SMFE 1 (1969) ,391－399

4) Bishop,A.W.: The Strength of Soils as Engineering Materials, Geotech. 16, No.2 (1966) ,91－130

5) 諸戸靖史：砂の降伏条件に関する考察，土木学会第28 回年次学術講演概要集第3部（1973）