

1. Mandel-Cryer 効果について

Biot の方程式にもとづいて球の圧密の問題を解くと、定圧密荷重のもとでも球の中心の空隙水圧は圧密の初期にいったん増加し、極値をとってその後減少過程に入る。これに対し、熱伝導型の圧密方程式の解においては空隙水圧は単調に減少する。そして両者の解に差異のあることを指摘した人の名にちなんでこのような現象を Mandel-Cryer 効果と呼んでいる。

空隙水圧の増加は圧密過程のある時期に $\dot{u} = C_v \nabla^2 u + \dot{\varphi} > 0$ であればみられる現象で、熱伝導型の圧密方程式 $\dot{u} = C_v \nabla^2 u$ ($\dot{\varphi} = 0$) から得られない解である。ここに $\varphi = (\lambda + 2\mu)e + u$ は圧密ポテンシャルである。そこで Ayer の取扱った球の中心は排水面から最も遠い位置であり、圧密過程の初期最も永く $\nabla^2 u$ の値を零に保っている。そのため $\dot{\varphi} > 0$ (球の問題では) であることの影響が空隙水圧の挙動に集約して現われたものである。今、球の表面即ち排水面に視点を向けるならば $u=0, \dot{u}=0$ で Biot と熱伝導型との解に向う差異はない。しかし $\nabla^2 u$ の値の挙動には両者に大きな差異がある。熱伝導型においては圧密過程を通じて排水面で $\dot{u} = C_v \nabla^2 u = 0$ であるのに対し、Biot の解では $\nabla^2 u < 0$ ($-C_v \nabla^2 u = \dot{\varphi} > 0$) である。即ち体積ひずみは圧密過程を通じて減少し続け $\dot{\varphi} > 0$ の影響が体積ひずみに集約して現われる。こうした球の中心の空隙水圧および球の表面の体積ひずみの挙動に対する Biot と熱伝導型との解の差異は圧密ポテンシャルによって説明される。換言するならば、いわゆる "Mandel-Cryer 効果" を示現するものは空隙水圧の増加挙動ではなくて、圧密ポテンシャル φ の挙動であるということができる。

2. 圧密ポテンシャル φ の挙動について

球の問題においては圧密過程を通じて $\dot{\varphi} > 0$ であるが、一般の圧密においては圧密ポテンシャルは単調な時間的な変化をしない。その単純な例を示そう。

長方形の断面をもつ無限に長く滑らかなチャンネル内の粘土層に一樣な積み荷重が載り、排水面は全境界面であるとするれば、排水方向は二次元である。圧密ポテンシャルは定義から

$$\varphi = (\lambda + 2\mu)e + u = \sigma_z' + u + 2\mu e_x = \sigma_z' + 3\mu e_x \quad (e_y = 0)$$

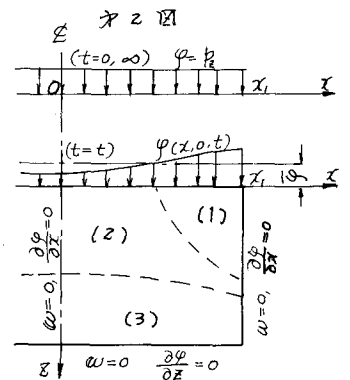
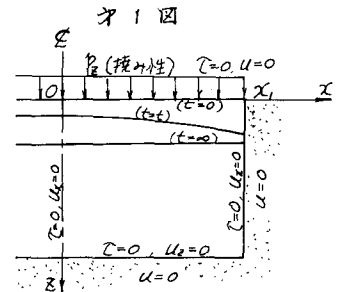
である。今の場合、載荷直後と圧密完了時の状態は二次元圧密の場合と全く同様であり、全ての面で $e_x = e_z = 0$ であるから $t=0, \infty$ において

$\varphi(x, z) = \sigma_z(x, z) = u_0 = p_0$ である。そして圧密の進行とともに排水が二次元的で荷重が積み荷であるから粘土層の表面は、第1図に示すように山型の曲面になることが予想される。境界面が歪曲してくる。これは $\sigma_{\theta\theta} \neq 0$ の圧密であり、 $\text{grad } \varphi \neq 0$ で、圧密ポテンシャルはある分布をもつことになる。

一方、圧密における2つの Laplace の方程式

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 w = 0 \quad (w: \text{回転ベクトル})$$

に対するこのケースの境界条件は第2図に示されている。そして、時間的に変化する境界値は $z=0$ の境界面における値のみであるので、この値を検討すれば内部状態を推定することができる。そこで、 $z=0$ の境界面に



おける圧密ポテンシャル $\varphi(x, 0, t)$ は

$$\begin{aligned}\varphi(x, 0, t) &= p_2 + 3\mu \varepsilon_x(x, 0, t) \\ &= p_2 - 3\mu \frac{\partial}{\partial x} u_x(x, 0, t)\end{aligned}$$

で与えられる。これを x 方向に積分して $z=0$ の境界面における平均圧密ポテンシャル $\bar{\varphi}(z=0, t)$ を計算すると $u_x(0, 0, t) = u_x(x_1, 0, t) = 0$ であるから

$$\bar{\varphi}(z=0, t) = p_2$$

となる。そして、 z の Laplace の方程式の性質から次の結論を得る。

(1) 土塊全体の平均圧密ポテンシャル $\bar{\varphi}(t)$ は

$$\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}(z=0, t) = p_2$$

(2) 土塊内の最大および最小圧密ポテンシャル $\varphi_{\max}$

および $\varphi_{\min}$ は、 $z=0$ の境界面における圧密ポテンシャルの最大値と最小値に等しい。

$$\varphi_{\max}(x, 0, t) \geq \varphi(x, z, t) \geq \varphi_{\min}(x, 0, t)$$

そこで、圧密荷重 p_2 が時間的に変化しないとすると

$$\dot{\bar{\varphi}}(t) = \dot{p}_2 = 0$$

すなわちこのケースの圧密では土塊全体の平均圧密ポテンシャルは時間的に変化せず、一定である。

以上を総合すると

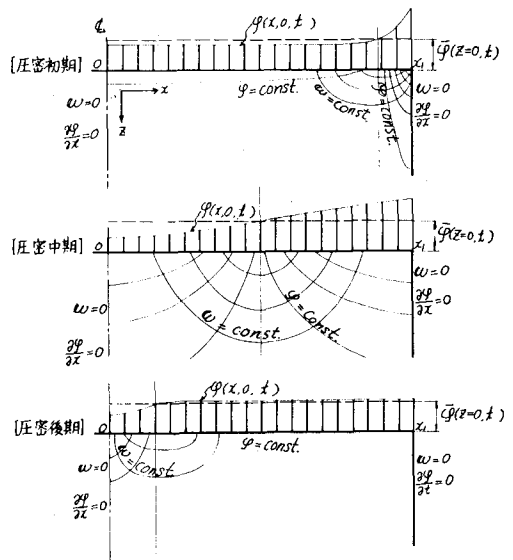
$$\begin{aligned}t=0 & \quad \varphi(x, z, 0) = p_2 = u_0 \quad (\text{一様}) \\ t=t & \quad \begin{cases} \bar{\varphi}(t) = p_2 = u_0 \\ \text{grad } \varphi \neq 0 \end{cases} \quad (\text{分布を持つ}) \\ t \rightarrow \infty & \quad \varphi(x, z, \infty) = p_2 = u_0 \quad (\text{一様})\end{aligned}$$

であるから圧密ポテンシャルは圧密の初期に一様に分布し、圧密過程で圧密ポテンシャルを圧密荷重に等しく保ちながら土塊内で圧密ポテンシャルの相互移動を起す。そして圧密終期には、また一様分布に復元して圧密は終息する。したがって領域的には次の三つのケースがある。

- 1) 圧密の初期に φ が増加し終期に減少する領域
 - 2) 圧密の初期に φ が減少し終期に増加する領域
 - 3) 圧密過程でほとんど φ に変化のない領域
- (これら三つの領域の概略的位置はオ 2 図に示されている)

オ 3 図は、圧密ポテンシャルの分布性状を定性的に示したものであって $\varphi = \text{const.}$ と $w = \text{const.}$ の線はそれぞれ透水における等ポテンシャル線と流線に相当する。このケースにおいては、圧密の最も早く進行し、 $z=0$ の境界面の歪曲を起し易い。 $z=0$ 、 $x=x_1$ 付近で、まず圧密ポテンシャルが局部的に分布をもち、分布の中心的位置は $z=0$ の境界面で $\varphi(x, 0, t) = \bar{\varphi}(z=0, t)$ の点である。そしてこの点は圧密の進行とともに $\text{grad } \varphi \neq 0$ の領域を拡大しながら $x=0$ の点に向って移動する。この点が $x=\frac{1}{2}x_1$ 付近に来た時 $\text{grad } \varphi \neq 0$ の領域は、最大になり、その後 $x=0$ に近づくにつれてこの領域は縮小する。そしてこの点が $x=0$ に来た時圧密は完了して圧密ポテンシャルは一様分布に戻る。この問題は、バーチカルドレーンによる圧密において Barron が規定した自由ひずみの問題でもある。オ 4 図は $z=0$ の境界面の圧密ポテンシャル $\varphi(x, z=0, t)$ の時間的挙動を定性的に示したものである。また、 $\dot{\varphi} < 0$ の過程を含む場合には、負の Mandel-Cryer 効果があり、 $(\varphi - u)_{\max} > \varphi_{\text{final}}$ の領域には膨潤過程が存在する。そして、単純な圧密過程と思えるこのケースでも $z=0$ 、 $x=x_1$ 付近で膨潤が起る。

オ 3 図
圧密ポテンシャルの性状



オ 4 図

