III-15

土などの粉粒状体に関する等方硬化塑性理論
― 負荷関数に関する力学的考察 ―

九大農学部　橋口公一

I. 緒 言　先きに、等方性ならびに負荷面の相似性を前提とした場合の土などの粉粒状体の正規圧密近傍における硬化塑性法則を金属塑性論に対照しうる数理論としてまとめた[1,2]。しかし、そこには負荷関数(初期および後続降伏関数)の確立が重要な課題として残された。これは、先きに明らかにされた所論が金属塑性論において確立されたNormality Conditionその他の基本仮定を継承し、これらに粉粒状体の特殊性として塑性的な体積変化を硬化測度とする極く自然な仮定を考慮することによって純理論的に導びかれたのに対して、負荷関数の決定は対象材料により異なる降伏応力特性の究明によりなされるものであり、これらの得られる背景の相異によるであろう。粉粒状体の負荷関数の決定においては、微視的観点からの粒子集合体の応力-変形解析ないし巨視的な実験特性に基く妥当な降伏概念を把握せねばならない。しかし、このような適切な解析はなされておらず、また、実測データの蓄積も不十分であり、これらの従来の資料により負荷関数を決定するには至り得ない。ここでは、先づ、負荷関数に対する所求の条件を考察し、さらに諸種の基本的変形概念に従う負荷関数の導出過程を明らかにし、また、これらから導びかれる具体的な負荷関数を示しておく。これらのいずれかが土などの粉粒状体に対する適切な負荷関数となり得ると思われるが、その選択はあくまで、実証により確められねばならない。以下に示す解析はこの実証に際しても適切な照査の手段を与えるとともに、設定された負荷関数の力学的意義を究明するさいにも不可欠である。以下においては応力および歪に関する諸量の符号は引張を正とする。

II. 負荷関数に関する基本事項の省察[1)]　塑性体積歪v^pを硬化測度とすれば、負荷条件式は負荷関数$f(\sigma_{ij})$および硬化関数$F(v^p)$により$f(\sigma_{ij})-F(v^p)=0$……(2.1)で与えられる。ここに、σ_{ij}は応力テンソルである。なお、$f(\sigma_{ij})$はσ_{ij}に関する同次関数であるとし、また等方塑性応力状態において$f(\sigma_{ij})=-P=-\frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}$ (δ_{ij}: Kronecker's delta)……(2.2)を満たすように選らべば、円筒座標により$f(\sigma_{ij})=-P\cdot g(\eta,\sin 3\theta)$……(2.3)と表わしうる。ここに$\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}-P\delta_{ij}$, $r=(\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})^{1/2}$, $S=(\sigma'_{ij}\sigma'_{jk}\sigma'_{ki})^{1/3}$, $\eta=-r/P$, $\sin 3\theta=-\sqrt{6}(S/r)^3$であり、$g$は$\eta$と$\sin 3\theta$の関数であるが、等方塑性応力状態$\eta=0$に対して$g=1$……(2.4)を満たす無次元パラメータである。

III. 負荷関数設定に際しての条件　先づ、主応力空間において負荷面は a) 凸面性 ― Druckerの条件 ― を満たし、さらに b) 相似性 ― 負荷関数の応力に関する同次性 ― を継持すると仮定する。さて、諸実測資料によれば硬化挙動と軟化挙動の境界状態として一定応力下で体積変化に比して無限に大きな形状変形を生じる状態 ― Critical state (以下C.S.と略記する)が存在し、本状態を示す応力域は主応力空間において曲面 ― Critical state surface ― を形成する。ところで、C.S.においてはNormality Conditionにより負荷面の法線が平均応力P軸に垂直であること、および仮定b)を考慮するとC.S. Surfaceは主応力空間において錐面を呈することになる。以上により、Mを$\sin 3\theta$の関数とすれば、c) C.S. surfaceは$\eta=M(\sin 3\theta)$……(3.1)で与えられ、さらに$\frac{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)}{dv^p}=\frac{\partial f/\partial r}{\partial f/\partial P}=\frac{g_\eta}{g_\eta\cdot\eta-g}$……(3.2)の関係[1)]を考慮して d) $\lim_{\eta\to M-0}\frac{d\varepsilon_r\cos(\psi-\theta)}{dv^p}=\lim_{\eta\to M-0}\frac{g_\eta}{g_\eta\cdot\eta-g}=-\infty$……(3.3)でなければならないことになる。ここに、$d\varepsilon_{ij}^p$を塑性歪増分として$d\varepsilon'^p_{ij}=d\varepsilon^p_{ij}-\frac{1}{3}dv^p\delta_{ij}$, $d\varepsilon_r^p=(d\varepsilon'^p_{ij}d\varepsilon'^p_{ij})^{1/2}$, $d\varepsilon_s^p=(d\varepsilon'^p_{ij}d\varepsilon'^p_{jk}d\varepsilon'^p_{ki})^{1/3}$, $\psi=-\frac{1}{3}\arcsin\{\sqrt{6}(d\varepsilon_s^p/d\varepsilon_r^p)^3\}$および$g_\eta=\frac{\partial g}{\partial\eta}$である。また、従来の3軸試験結果により本試験条件下でC.S. Surfaceは非粘着性のCoulom・Mohr型式を満たすことが知られている。したがって、βを材料定数として e) $\sin 3\theta=1$(3軸圧縮)に対して$\eta=\frac{2\sqrt{6}\beta}{3-\beta}$, $\sin 3\theta=-1$(3軸伸張)に対して$\eta=\frac{2\sqrt{6}\beta}{3+\beta}$……(3.4)でなければならない。なお、本条件を満たす凸面性の曲面の応力不変量表示式は$\eta=\frac{2\sqrt{6}\beta}{K^{1/4}}$, $K=G-H\sin 3\theta$, $G=\frac{\{(\beta^2+9)^2+36\beta^2\}}{576}$, $H=\frac{\beta(\beta^2+9)}{48}$……(3.5)で与えられ、また凸面性は不充分($\beta>0.3749$で僅かながら凹面を呈す)であるが最もシンプルな表示式は$\eta=\frac{2\sqrt{6}\beta}{3-\beta\sin 3\theta}$……(3.6)である[3)]。以下においてはこれらをC.S. Surfaceの表示式として取り扱う場合があるが、C.S. Surfaceは負荷面ではないので、これ自体が凸面性を満たす必要はない。これに基づいて得られる負荷面が凸面性の条件に抵触しなければよい。なお、過去の実測データから定性的に認められることとして、ある負荷面f上のC.S.における平均応力をP_{cs}として負荷面の相似性により、$-\frac{P_{cs}}{f}=l(\sin 3\theta)$……(3.7)とおくと$l$値はおおよそ0.5であるが、一般に定値ではなく、3軸圧縮試験状態で最小、同伸張状態で最大である。　さて、等方応力状態においては形状変形は生じないで体積変化のみが生じるので f) $\lim_{\eta\to 0}\frac{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)}{dv^p}=\lim_{\eta\to 0}\frac{g_\eta}{g_\eta\cdot\eta-g}=-0$……(3.8)となる。なお、等方塑性応力の大きな履歴を受けた場合には材料の等方性の仮定が理想的に成立つが、負荷面はP軸上で押し出された形になり、そこでは負荷面の曲率が相当大となる(角点発生の)可能性があるので、条件f)に抵触しても、負荷関数として、よりシンプルな関数を設定した方が得策な場合もあり得ると思われる。ただし、本場合も含めて、基本条件a)により g) $0<\eta<M$に対して$\frac{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)}{dv^p}<0$……(3.9)でなければならない。

IV. 力学的諸観点からの負荷関数の考察　前章で考察したように負荷関数決定に際しての既知な条件はCriticalおよび等

1) 土木学会西部支部S47年度年次講演集 2) 土木学会第27回年次講集 3) 土木学会論文報告集, 第199号

方応力の両極限状態に関するもののみで、その具体的決定に対する十分な条件ではない。したがって、他の何らかの情報により、これらの条件を補わねばならない。その直接的な手段は種々の応力径路試験の実施により、種々の硬化状態における弾塑性境界を見い出すことであるが、その境界の不明瞭さなどにより本試験による負荷関数の決定は難しい。むしろ、その際に生じる応力－塑性歪増分特性を把握して、これから解析的に負荷関数を決定する方が、実際問題における応力－歪解析への理論の適用に際して妥当な解を与え得ると思われる。本章では負荷関数と直接的に関連する構成諸関係を詳察し、これらに基づく負荷関数導出の一般論を明らかにし、さらにその特殊な場合としての具体関数を例示するとともに、従来、提案されている変形諸概念に基づく負荷関数を明らかにしておく。

(1) 特性関係 $\frac{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)}{dv^p}=\chi(\eta,\sin 3\theta)$ に基づく負荷関数の導出　式(3.2)の右辺はηと$\sin 3\theta$の関数であるので、これを $\frac{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)}{dv^p}=\chi(\eta,\sin 3\theta)$……(4.1) とおく。以下においては、$\chi(\eta,\sin 3\theta)$の関数形が既知であるとして、式(4.1)の特性関係に基づく負荷関数を導出する一般論を述べる。さて、式(4.1)より $\frac{g_\eta}{g}=\frac{\chi}{\chi\cdot\eta-1}$……(4.2) の関係が得られる。式(2.4)を考慮して、式(4.2)をηについて積分すると $g=\exp\left[\int_0^\eta\frac{\chi}{\chi\cdot\eta-1}d\eta\right]$……(4.3) を得る。なお、Roscoe他[4]が$\psi=\theta$(P軸に関して軸対称な負荷面)の場合に対して示した手法を$\psi\neq\theta$に対して拡張して $\frac{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)}{dv^p}=-\frac{dP}{dr}=\frac{\partial P}{\partial\eta}\Big/\left(\eta\frac{\partial P}{\partial\eta}+P\right)=\chi(\eta,\sin 3\theta)$……(4.4) とおき、本式から得られる関係 $-\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{\chi}{\chi\eta-1}$……(4.5) を式(2.2)に注意して、$\eta$について積分しても同等の結果が得られる。

(2) 塑性仕事増分dW^pに関する材料特性に基づく負荷関数の導出　等方性の前提下では塑性仕事増分dW^pは一般に $dW^p=Pdv^p+rd\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)$……(4.6) で与えられる。[2] ところで、Roscoe他[4]、Schofied & Wroth[5]は$\psi=\theta$とし(軸対称負荷面となるので、$M=const.$($=M_c$とおく)である)、さらに、硬化粘性土の材料特性として $dW^p=-M_cPd\varepsilon_r^p$……(4.7) を仮定して、本式と式(4.5)から $\frac{d\varepsilon_r^p}{dv^p}=\frac{1}{\eta-M_c}$……(4.8)を導びき、前節終りに述べた手法で $g=\exp\left[\frac{\eta}{M_c}\right]$……(4.9) を提案している。また、Burland[6]は式(4.6)の代わりに $dW^p=P\sqrt{[(dv^p)^2+(Md\varepsilon_r^p)^2]}$……(4.10) を仮定して $g=1+\left(\frac{\eta}{M_c}\right)^2$……(4.11) を主張している。　これらは軸対称の負荷面に局限された議論であり、また、$\psi=\theta$が成り立つ3軸試験状態においても硬化粘性土の塑性仕事増分が式(4.7)あるいは(4.10)に従う必然的論拠は見当らない。本節では、一般式(4.5)を考慮し、また、材料特性としてのdW^pに対するより一般な仮定に基づく負荷関数を明らかにしておく。　さて、式(4.6)はnを整数とすれば、2項定理により $dW^p=\left[\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r(Pdv^p)^{n-r}\{rd\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)\}^r\right]^{\frac{1}{n}}$……(4.12) と記述しうる。ここに、${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$である。ところで、材料特性として塑性仕事増分が $dW^p=\left[\sum_{r=0}^{n}\alpha_r dv^{p\,n-r}\{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)\}^r\right]^{\frac{1}{n}}=0$……(4.13) で与えられると仮定する。ここに、α_r $(r=0,1,\cdots,n)$はr, Pおよび$\sin 3\theta$の関数で、かつ、応力に関するn次の同次関数である。式(4.12)と(4.13)を等値すれば、$\sum_{r=0}^{n}\left({}_nC_rP^{n-r}r^r-\alpha_r\right)\left\{\frac{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)}{dv^p}\right\}^r=0$……(4.14) の関係が得られる。本式の $\frac{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)}{dv^p}$ に関する実根はηおよび$\sin 3\theta$の関数となるが、これらを$\chi(\eta,\sin 3\theta)$とおけば、前節に述べた所論により負荷関数を導きうる。

(3) Dilatancyによる塑性体積比変化$\int dV_d^p=h(\eta,\sin 3\theta)$特性関係に基づく負荷関数の導出 ― 柴田のdilatancy概念の一般的拡張およびこれに基づく負荷関数　柴田[7]は諸実測データから3軸試験状態におけるdilatancy(平均応力の変化によらない体積変化)による体積歪v_dは$\sigma_1-\sigma_3\leqq\sigma_0$に対して$v_d=0$, $\sigma_1-\sigma_3>\sigma_0$に対して $v_d=D\left\{\frac{(\sigma_1-\sigma_3)-\sigma_0}{P}\right\}$……(4.15)で与えられると提案し、さらに軽部他[8]は式(4.15)を一般応力状態へ拡張した形で、$\eta\leqq\eta_0$に対して$v_d=0$, $\eta>\eta_0$に対して$v_d=D'(-\eta+\eta_0)$……(4.16) を主張している。これらの式においてσ_1およびσ_3は最大および最小主応力, σ_0およびη_0はdilatancyが生じない限界の軸差応力値およびη値であり、また、DおよびD'はdilatacy係数と命名された材料定数であるが、これらの間には$D=\sqrt{\frac{2}{3}}D'$の関係がある。　さて、島・太田[9]はv_dは塑性的であると仮定して、公称歪の観点からdilatancyによる塑性体積比増分dV_d^pは式(4.16)により、$dV_d^p=V_0dv_d=-V_0D'd\eta$……(4.17)で与えられるとした。ここに、$V_0$は変形初期の体積比である。他方、平均応力の変化による塑性体積比増分dV_p^pはTerzaghiの等方圧密に対する体積比$V-\log(-P)$線型関係に基づけば $dV_p^p=-(\lambda-K)\frac{dP}{P}$……(4.18) で与えられるので、これらの2式より塑性体積比増分dV^pは $dV^p=dV_p^p+dV_d^p=-(\lambda-K)\frac{dP}{P}-V_0D'd\eta$……(4.19) となる。さらに、島・太田は本式において中立負荷に対して$dV^p=0$の観点から負荷関数は $f=-P\cdot\exp\left[\frac{V_0D'\eta}{\lambda-K}\right]$……(4.20) で与えられるとしている。しかし、柴田さらには軽部他の提案式は$0\leqq\eta\leqq M$におけるdilatancy特性を2個の線型関数で表現しており、彼等の主張をそのまま受け入れる負荷関数は$\eta\leqq\eta_0$に対して$f=-P$, $\eta_0<\eta\leqq M$に対して $f=-P\exp\left[\frac{V_0D'(\eta-\eta_0)}{\lambda-K}\right]$……(4.21) である。島・太田は式(4.19)の積分に際して$\eta=\eta_0$において$-P=f$の初期条件を考慮せずに$\eta=0$において$-P=f$としたと解される。なお、太田・島[10]は式(4.21)を異方性負荷関数であると考えて異方圧密特性に関する報告を行っているが、本式は不変量表示であるので、等方性負荷関数であることは自明である。さて、上述のように、柴田・軽部他が与えたdilatancy式は実験特性を2個の関数により表現したものであるが、これらによらねばならない必然性はなく、むしろ、実測データの厳密な表現、さらには理論構成の簡潔さの点においても有利な単一関数による表現が可能であるように思われる。また、島・太田の負荷関数導出のプロセスは公称歪の概念に基づいたもので、厳密な議論ではない。　以下、本節では等方性の前提下における一般化されたdilatancy特性

4) Géotechnique, Vol. 13. 5) Critical State Soil Mech. 6) Géotchnique, Vol. 15 7) 京大防災研年報, 第6報, 8) 土木学会論文集135号 9) 土木学会論文集172号, 10) 土木学会論文集 169号

を規定し、これに基づいて負荷関数を導出しておく。さて、一般塑性応力(増分)状態に対して、塑性体積比増分は $dV^p=-(\lambda-\kappa)\frac{dP}{P}-dh(\eta,\sin 3\theta)$……(4.22)で与えられると仮定する。右辺第2項が dV_d^p に相応し、h は η と $\sin 3\theta$ の関数である。他方、$dV^p=-(\lambda-\kappa)\,df/f$ であるから[1]、これらの2式を等値し、$\eta=0$ において $-P=f$ を考慮して積分を行えば、$g=\exp\left[\frac{h}{\lambda-\kappa}\right]$……(4.23) および条件：$\eta=0$ に対して $h(\eta,\sin 3\theta)=0$……(4.24)を得る。ところで、式(4.23)に、C.S.における条件 d)を考慮すると、$h_\eta=\frac{\partial h}{\partial\eta}$……(4.25)として、$\lim_{\eta\to M-0}\frac{h_\eta}{\eta\cdot h_\eta-(\lambda-\kappa)}=-\infty$……(4.26)でなければならないので、$\lambda-\kappa=M\cdot(h_\eta)_{\eta=M}$……(4.27)の関係が成立する。本式を式(4.23)に考慮すると $g=\exp\left[\frac{h}{M\cdot(h_\eta)_{\eta=M}}\right]$……(4.28)が得られる。なお、条件 f)を満たすためには $(h_\eta)_{\eta=0}=0$……(4.29)でなければならない。$h(\eta,\sin 3\theta)$ の特殊型として $h=\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\eta^s$（多項式）……(4.30)の場合には $g=\exp\left[\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\eta^s/\sum_{s=1}^{n}s\alpha_s M^s\right]$……(4.31)となり、$h=\ln\left[1+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\eta^s\right]$（多項式の対数）……(4.32)の場合には $g=\left(1+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\eta^s\right)^K$，$K=\sum_{s=1}^{n}s\alpha_s M^s/\sum_{s=1}^{n}\alpha_s M_s$……(4.33)となる。これらの諸式において、$\alpha_s\,(s=1,\cdots,n)$ は $\sin 3\theta$ の関数である。

(4) シンプルな負荷関数の数例　以上の(1)〜(3)節で明らかにした所論により導いた比較的シンプルな具体的負荷関数を表記しておく。なお、$l=const.$ の場合には条件 a)により、$M(\sin 3\theta)$ として、式(3.5)を用いねばならない。a_1, a_2, a_3 および b_3 は定数あるいは $\sin 3\theta$ の関数とし、いずれも非負である。

	$\frac{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)}{dv^p}$	dW^p	$\int dV_d^p$	$g\left(=-\frac{f}{P}\right)$	$l\left(=-\frac{P_{cs}}{f}\right)$	$\lim_{\eta\to 0}\frac{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)}{dv^p}$	備考
A	$\frac{1}{\eta-M}$	$-MPd\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)$	$a_1\eta$	$\exp\left(\frac{\eta}{M}\right)$	$\frac{1}{e}\fallingdotseq 0.3679$	$-\frac{1}{M}$	Roscoe他，太田他 ($\psi=\theta, M=const.$)
B	$\frac{\eta}{\eta^2-M^2}$	$[(Pdv^p)^2+Pdv^p r d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)+\{MPd\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)\}^2]^{1/2}$	$\ln g$ $M\cdot(h_\eta)_{\eta=M}=1$	$\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{M}\right)^2\right]$	$\frac{1}{\sqrt{e}}\fallingdotseq 0.6065$	0	
C	$\frac{2\eta}{\eta^2-M^2}$	$[(Pdv^p)^2+\{MPd\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)\}^2]^{1/2}$		$1+\left(\frac{\eta}{M}\right)^2$	0.5	0	Burland ($\psi=\theta$, $M=const.$)
D	$\frac{a_2M-2\eta}{\eta^2-M^2}$	$[(Pdv^p)^2+a_2Pdv^pMPd\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)+\{MPd\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)\}^2]^{1/2}$		$1+a_2\frac{\eta}{M}+\left(\frac{\eta}{M}\right)^2$	$\frac{1}{2+a_2}$	$-\frac{a_2}{M}$	
E	$\frac{a_3M^2+\frac{3}{2}\eta^2}{\eta^3-M^3}$	$[(Pdv^p)^3+3(Pdv^p)^2rd\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)+\frac{3}{2}Pdv^p\{r^2-a_3(MP)^2\}\{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)\}^2-\{MPd\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)\}^2]^{1/3}$		$1+a_3\frac{\eta}{M}+\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{M}\right)^3$	$\frac{2}{3+2a_3}$	$-\frac{a_3}{M}$	
F	$\frac{2b_3M\eta+\frac{3}{2}(1-b_3)\eta^2}{(1-b_3)\eta^3+b_3M\eta^2-M^3}$	$[(Pdv^p)^3+3(Pdv^p)^2rd\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)+Pdv^pr\left(\frac{3}{2}r+\frac{2b_3}{1-b_3}MP\right)\{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)\}^2+\frac{MP}{1-b_3}\{r^2-(MP)^2\}\{d\varepsilon_r^p\cos(\psi-\theta)\}^3]^{1/3}$		$1+b_3\left(\frac{\eta}{M}\right)^2+\frac{1-b_3}{2}\left(\frac{\eta}{M}\right)^3$	$\frac{2}{3+b_3}$	0	

(5) Roweの stress-dilatancy 理論に基づく負荷関数　Rowe[11]は球状粒子集合体の変形解析を行い、最小エネルギの仮説に立脚して3軸圧縮試験状態における応力ー歪増分特性式 圧縮：$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}=-2\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_3}K$，伸張：$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}=-\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_3}K$……(4.34)を提案した。ここに、$K$ はマサツ角パラメータ ϕ_f により、$K=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)$ で与えられるが、以下においては $K=\frac{1+\beta}{1-\beta}=const.$……(4.35)と仮定する。また、式(4.34)における歪増分はその導出過程から塑性歪増分であると考えうる。さて、Barden & Khayatt[12]は3軸圧縮試験状態に対して式(4.34)から導びかれる関係 $\frac{\sqrt{2}d\varepsilon_1^p}{d\varepsilon_3^p}=\frac{\partial f/\partial\sqrt{2}\sigma_1}{\partial f/\partial\sigma_3}=-\frac{1}{K}\frac{\sigma_3}{\sqrt{2}\sigma_1}$……(4.36)を満たす $f_c=\frac{\sigma_3^{\ K}}{\sqrt{2}\sigma_1}$……(4.37)を負荷関数として主張している。式(4.37)は3軸圧縮試験状態に局限されたものであることもさることながら、本状態に限っても式(4.37)が式(4.36)を満たす唯一の関数であるという論証はなされていない。以下においては式(4.34)を満たす一般応力状態における負荷関数を明らかにしておく。さて、式(4.34)から式(4.1)の関数 χ は 圧縮：$\chi_c=\frac{-\sqrt{2/3}(K-1)\eta+2K+1}{(K+2)\eta-\sqrt{6}(K-1)}$，伸張：$\chi_e=\frac{-\sqrt{2/3}(K-1)\eta+K+2}{(2K+1)\eta-\sqrt{6}(K-1)}$……(4.38)で与えられる。本式を満たす一般応力状態における χ として $\chi=\frac{-\sqrt{2/3}(K-1)\eta+\frac{3}{2}(K+1)+\frac{1}{2}(K-1)\sin 3\theta}{\left\{\frac{3}{2}(K+1)-\frac{1}{2}(K-1)\sin 3\theta\right\}\eta-\sqrt{6}(K-1)}$……(4.39)を仮定する。ここで、条件 D)を考慮すると $M=\frac{2\sqrt{6}\beta}{3-\beta\sin 3\theta}$ となるので、C.S.Surface として式(3.6)を仮定したことになる。これにより、$\chi=\frac{-M\eta+\sqrt{\frac{3}{2}}M\sin 3\theta+3}{3(\eta-M)}$……(4.39)と記述される。なお、$\chi_{\eta=0}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin 3\theta-\frac{1}{M}$，$\chi_{\eta=M}=-\frac{M}{3}$……(4.40)である。さて、式(4.39)を(1)節に述べた手法で積分を実行すれば、Roweの所論を拡張した一般応力状態における負荷関数 $f=-P\Big/\left[\frac{1}{3}\{(3+t^2)-(\eta-t)^2\}\left\{\frac{\sqrt{3+t^2}+t}{\sqrt{3+t^2}-t}\cdot\frac{\sqrt{3+t^2}-t+\eta}{\sqrt{3+t^2}+t-\eta}\right\}^A\right]$……(4.40)を得る。ここに、$t=\sqrt{\frac{8}{3}}\sin 3\theta$，$A=\frac{t+3/M}{\sqrt{3+t^2}}=\frac{3}{\sqrt{8+\sin^2 3\theta}}\frac{K+1}{K-1}$ である。式(4.40)を3軸状態について書くと 圧縮：$f_c=-P\Big/\left[\frac{1}{3}\left\{3+\sqrt{\frac{3}{2}}\eta+\eta^2\right\}\left\{\frac{\sqrt{6}+2\eta}{\sqrt{6}-\eta}\right\}^{\frac{K+1}{K-1}}\right]=\left(\frac{\sigma_3^{\ K}}{\sigma_1}\right)^{\frac{1}{K-1}}$，伸張：$f_c=-P\Big/\left[\frac{1}{3}\left\{3-\sqrt{\frac{3}{2}}\eta+\eta^2\right\}\left\{\frac{\sqrt{6}+\eta}{\sqrt{6}-2\eta}\right\}^{\frac{K+1}{K-1}}\right]=\left(\frac{\sigma_3^{\ K}}{\sigma_1}\right)^{\frac{1}{K-1}}$……(4.41)となる。これにより、Barden & Khayatte式(4.37)は関数のサイズを適当に選択することにより、式(4.41)に一致させうることがわかる。Roweの所論を考慮した負荷関数はその最もシンプルな場合(4.40)においてすら非常に複雑で、理論式の展開においては不利面を伴うと思われる。

(6) 松岡の mobilize theory に基づく負荷関数について　松岡[13]はセン断応力 τ と垂直応力 σ_N の比 $\frac{\tau}{\sigma_N}$ が最大の面において $\frac{\tau}{\sigma_N}=-\lambda\frac{d\varepsilon_N}{d\gamma}-\mu$……(4.42)が成り立つと提案している。$\lambda$ および μ は材料定数。足立他[14]は本関係に従う負荷関数を導くさいに、$\tau=r$，$\sigma_N=P$，$d\gamma=d\varepsilon_r^p$，$d\varepsilon_N=dv^p$ としているが、このような置き替えは許されない。(5)節と類同な手法で3軸圧縮に対する χ_c を導くと $\chi_c=\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda(2\sqrt{6}+\eta)/\{(9-4\lambda)\eta-6\mu\sqrt{\sqrt{6}+2\eta}\sqrt{\sqrt{6}-\eta}+\sqrt{6}\lambda\}$……(4.43)となり、局限された本状態ですら、積分可能か否もさることながら、非常に複雑である。

Ⅴ. 結　言

以上、土などの粉粒状体の負荷関数に関する力学的詳察を行ったが、その確立には適切な実験特性の把握が不可欠である。今後、上に示した観点からの実測資料の蓄積に期待したい。本研究については山口柏樹先生より多くの貴重な御助言を頂いた。付記して謝意を表したい。

11) Pro. Roy. Soc. London, SA. Vol. 269, 12) Géotechnique Vol. 16 & 19, 13) 第8回国際土質基礎会議（モスクワ）論文コピー 14) 第8回土質工学会講演集