III－5　　透水理論の体系について

岐阜大学工学部　正員　宇野尚雄

1. まえがき

土中の透水解析は，運動の式としてダルシーの法則を不飽和の場合にも拡張して用い，連続式と組み合わせて基礎方程式を導き，初期および境界条件を満足する解を見い出すという手順をとるのがふつうである。本報告は端的にいえば，(1)解析式は透水による含水比変化がある場合とない場合に分けられること，(2)含水比変化のある非定常透水では貯留係数あるいは比水分容量なるパラメターが透水係数と同様に重要であること，(3)したがって，非定常パラメターを考慮した結果を述べるものである。なお間隙空気の作用を無視できる場合について論じるが，今後この作用を考慮する必要がある。

2. 透水解析の基本式

土中の任意点の間隙水圧を u_w，ある基準面からの高さを z とすると，水頭 h は位置水頭 h_e と圧力水頭 h_p の和であって，

$$h = h_e + h_p = z + u_w/\gamma_w \qquad (1)$$

ここに，γ_w：水の単位体積重量

水頭の場所的変化率すなわち勾配に負符号を付した動水勾配 i はみかけの流速 v と比例するから

$$v = ki \qquad (2)$$

ここに，k：透水係数，i の x, y, z 方向成分は

$$i_x = -\frac{\partial h}{\partial x},\quad i_y = -\frac{\partial h}{\partial y},\quad i_z = -\frac{\partial h}{\partial z} \qquad (3)$$

式(2)は層流範囲で成立し，Re数 $Re = vD_{10}/\nu$ (ν：水の動粘性係数，D_{10}：10%径) が2～10以上になると，Forchheimer の式などを採用しなければならないが，本文では式(2)のダルシー則を運動の式として用いる。式(2)の v と真の浸透速度 v_s とは異なり，$v_s = v/n$ (n：間隙率) とされていたが，土中を水が浸透・通過し得る間隙部分としての有効間隙率 n_e 用いて

$$v_s = v/n_e \qquad (4)$$

さて，土の構造が固定されていて，土は間隙空間を提供するだけであること，水の非圧縮性および間隙空気を無視するという仮定を設けると，

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + div.(v) = 0 \qquad (5)$$

ここに，θ：体積含水率 $\theta = (\gamma_d/\gamma_w)\cdot w/100$ であって，土の全体積に対する間隙水体積の割合，w：含水比(%)。

3. 水平一次元透水

式(2)，(3)，(5)から $h_e = 0$ とすると

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial h_p}{\partial x}\right),\ i.e.,\ c\frac{\partial h_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial h_p}{\partial x}\right) \qquad (6)$$

あるいは

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_x}{c}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \qquad (7)$$

ここに，比水分容量 c と水分拡散係数 D_x は

$$c = \partial\theta/\partial h_p \quad (8),\qquad D_x = k_x/c \qquad (9)$$

これらのパラメターは定数となることも多く，その際は式(6)や式(7)は線形式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_x\cdot\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\quad or\quad \frac{\partial h_p}{\partial t} = D_x\cdot\frac{\partial^2 h_p}{\partial x^2} \qquad (10)$$

となるが，ふつうはサクションの大きさにより変化するため非線式となる。

体積含水率 θ の変化しない透水では式(6)より

$$-\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\cdot\frac{\partial h_p}{\partial x}\right) = 0 \qquad (11)$$

したがって一定断面内の定常透水は式(11)から $h_p = C_1x + C_2$ (C_1, C_2は定数) の直線的水頭分布になる。断面変化が若干ある場合にもこの一次元的取扱いを拡張して $Q_x = v_xA = const.$ として近似的に解き得る。しかし境界の浸潤面 ($x = x_f$) が移動する非定常透水では

$$v_x = \beta\cdot dx_f/dt \qquad (12)$$

を式(11)に付加して解析される（毛管透水解析）。β は貯留係数とよばれ，透水などにより含水比が初期の w_i（体積含水率を用いると θ_i）から w（または θ）になったとすると

$$\beta = |w - w_i|\cdot\gamma_d/\gamma_w = |\theta - \theta_i| \qquad (13)$$

絶対値記号は排水の場合を考慮したものである。式(13)で表わされるβは，土中に浸透貯留される水量が土全体積中に占める割合，あるいは土中から排水される割合である。したがって浸透時のβは土の初期含水比の増加につれ減少する。一方，排水時のβは土質の種類による差異が大きく，細粒の土になると著じるしく小さくなり，これは土の水分保持特性として知られる$w \sim pF$または$w \sim S$（S：サクション）の関係と密接な関係がある。

さて，貯留係数βは式(13)で定義される内容をもつが，土の初期含水比が大きくなると，とくに浸透過程では浸潤面のフロントが明確でなくなるため，浸潤面$x = x_f$の運動という観点から現象は正確に把握できない。なお，従来からβを上述の貯留係数の意味で使いながらも，先述した有効間隙率n_e（式(4)）と同義のように説明してきたことが多いが，乾燥土ではそれでもよく$\beta \fallingdotseq n_e$となるけれども，初期含水比の大きい土中への浸透の際には明らかに差異を生じ$\beta < n_e$となる。したがって，この両者は区別する必要がある。

式(12)を用いる解析ができないほど土の初期含水比が大きくなると，式(7)に基づいて解析しなければならない。含水比が場所的にも時間的にも変化する状態を考える必要から，式(7)には比水分容量cが用いられている。浸潤面が明瞭で含水比の急変する透水では貯留係数βを用いた解析が便利であるが，含水比が漸変する透水では比水分容量cを用いた解析が必要となる。

貯留係数βは浸透や排水にともなう体積含水率θの変化量と考えられ，$\beta = \left| \int_{\theta_i}^{\theta} d\theta \right|$と与えられる。式(8)の$\theta$が$h_p$あるいはサクションにより土固有の対応をすると考えると

$$d\theta = c\,dh_p \quad \therefore \beta = \left| \int_{h_{pi}}^{h_p} c\,dh_p \right| \qquad (14)$$

ここに，h_{pi}:初期の圧力水頭，h_p:透水により到達した圧力水頭であって，厳密にはh_pは時間的にも場所的にも変化しているので，βも変化していると考えねばならぬ。

式(14)でβとcが，$\theta \sim h_p$関係を用いて関係づけられると，周知の$w \sim pF$関係を描きなおした$\theta \sim h_p$関係において，cはその勾配であり，βは積分値であるという関係になっていることがわかる。

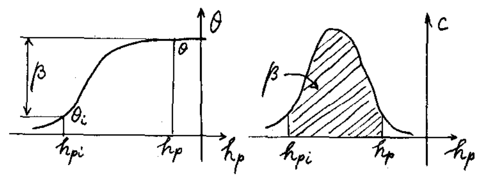
4. 鉛直一次元透水

式(6)などの取扱いに位置水頭zを考察する影響がでて，それぞれ

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial h}{\partial z}\right), \text{ i.e., } c \cdot \frac{\partial h_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial h_p}{\partial z} + k_z\right) \qquad (15)$$

あるいは

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k_z}{c} \frac{\partial \theta}{\partial z} + k_z\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{\partial \theta}{\partial z} + k_z\right) \qquad (16)$$



5. 二次元透水

二次元透水でも，式(6)などと同様に

$$c \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z}\right) \qquad (17)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + k_z\right) \qquad (18)$$

θが時間的に変化しないが場所的に変化し得る透水は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = 0 \qquad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{\partial \theta}{\partial z} + k_z\right) = 0 \qquad (20)$$

k_x, k_zが一定のとき，$x^* = \sqrt{k_z / k_x} \cdot x$を用いると

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \qquad (21)$$

のラプラスの方程式を得て，この解が流線網として知られている。結局，θが変化する透水は式(17)，(18)で，場所的にのみ変化し得る透水は式(19)，(20)でそれぞれ解析される。二次元透水でも，ゆるい自由水面をもつ非定常透水では，水頭hが鉛直線上で水面の高さである位置水頭h_eに等しいとするDupuitの仮定（準一次元的取扱いともいう）により，滞水層の厚さをH_0，水位変動量をhとして，連続式を式(5)に対して

$$\beta \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{(H_0 + h) \cdot v_x\right\} = 0 \qquad (22)$$

基本式は

$$\beta \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{k_x (H_0 + h) \frac{\partial h}{\partial x}\right\} \qquad (23)$$

$k_x =$一定，$h \ll H_0$のとき式(24)，$H_0 \fallingdotseq 0$のとき式(25)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k_x H_0}{\beta} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (24), \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k_x}{2\beta} \cdot \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2} \quad (25)$$

ここに現われたβは式(12)の一次元の際のものに対応する。