II-248　カルマン・フィルターによる大気汚染の予測

○ 東京工業大学　正員　日野 幹雄
日本電子開発　森 義一
数値解析研究所　吉川 信二郎

要旨 ： 大気汚染は大気拡散という物理法則に従う自然現象であるが、現象が複雑すぎ物理的予測が困難である。本報告は、大気汚染を線型微分方程式に従うある集中定数系であると考え、この微分方程式の係数を汚染濃度の刻々の観測資料から推定し、数時間先の汚染濃度を連続的に予測する一般的方法について述べる。その後実際の高汚染地域での適用結果について論じる。

I. システム方程式 ： まず大気汚染は、大気拡散という物理法則に従うという点から離れ、単なる線型微分方程式（1）に従う未知のシステムであると考える。（この報告の目的は、物理法則の解明ではなく、環境汚染の確実な予測である。）

$$\frac{d\mathbb{X}}{dt} = \mathbb{F}(t)\,\mathbb{X}(t) + \mathbb{L}(t)\,\mathbb{U}(t) + \mathbb{G}(t)\,\mathbb{W}(t) \qquad (1)$$

ここに、$\mathbb{X}$は濃度$(C^p_k, C^p_{k-1}, \cdots, C^p_{k-j})$・風速風向$(u_k, u_{k-1}, \cdots, u_{k-j})$・排煙量$(Q^g_k, Q^g_{k-1}, \cdots, Q^g_{k-j})$その他の物理量の配列からなるベクトルである。（$k$は時間ステップ）。$\mathbb{W}$は攪乱ベクトル、$\mathbb{F}$・$\mathbb{L}$・$\mathbb{G}$は行列。上式を差分表示すれば、次のようになる。{$\mathbb{U}$は制御量ベクトル（排煙量をこれに含める場合もある）。}

$$x_{i,k} = \alpha_{i1}\, x_{1,k-1} + \alpha_{i2}\, x_{1,k-2} + \cdots + \beta_{i1}\, x_{2,k-1} + \beta_{i2}\, x_{2,k-2} + \cdots + $$
$$+ a_{i1}\, u_{1,k-1} + a_{i2}\, u_{1,k-2} + \cdots + b_{i1}\, u_{2,k-1} + b_{i2}\, u_{2,k-2} + \cdots + w_{i,k-1} \qquad (2)$$

$$(i = 1, 2, 3, \cdots, m)$$

式（2）は、次のようにMatrix表示をすることができる。

$$\mathbb{X}(k) = \mathbb{M}(k+1)\,\mathbb{h}(k+1) + \mathbb{W}(k+1) \qquad (3)$$

ここに、$\mathbb{X}(k) = [x_{1,k}, x_{2,k}, \cdots, x_{m,k}]^T$, $\mathbb{h}(k-1) = [\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \beta_{11}, \beta_{12}, \cdots, a_{11}, a_{12}, \cdots, b_{11}, b_{12}, \cdots; \alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots, \beta_{21}, \beta_{22}, \cdots, a_{21}, a_{22}, \cdots, b_{21}, b_{22}, \cdots]$

$(j\times m + l\times n)\times m$ 次元ベクトル （j：$\mathbb{X}$の過去の最大ステップ、m：状態変数の数、l：制御量ベクトルの過去の最大ステップ、n：制御量の数）

$$\mathbb{M}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbb{y} & & 0 \\ & \mathbb{y} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbb{y} \end{bmatrix} \; ; \; \mathbb{y} = [x_{1,k-1}, x_{1,k-2}, \cdots \vdots\; x_{2,k-1}, x_{2,k-2}, \cdots, u_{1,k-1}, u_{1,k-2}, \cdots \vdots\; u_{2,k-1}, u_{2,k-2}, \cdots] \qquad (4)$$

II 観測方程式 ： 式（3）は汚染状態方程式（1）の変形であるが、これを逆に観測方程式とみなす。我々にとって、大気汚染系（の係数）は未知である。そして、この係数を直接測定することはできない。しかし、汚染状態$\mathbb{X}(k)$の測定から、この係数ベクトル$\mathbb{h}(k-1)$を推定することはできるであろう。すなわち、式（3）は未知係数の観測方程式と考えられる。

$$\mathbb{Z}(k) = \mathbb{M}(k)\,\mathbb{h}(k) + \mathbb{W}(k), \quad [\mathbb{Z}(k) = \mathbb{X}(k+1)] \qquad (5)$$

係数ベクトル $\mathbb{h}(k)$ の状態方程式は与えられていない。しかし、対象と考えている時間の範囲で係数は大きく変化しないと考えれば，

$$\mathbb{h}(k+1) = \mathbb{I}\,\mathbb{h}(k) + \mathbb{v}(k) \qquad (6)$$

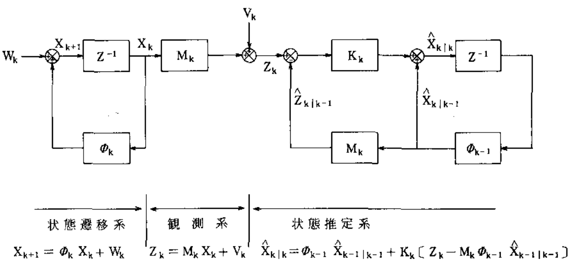
III. カルマン・フィルター ： 大気汚染系の係数方程式(6)とその観測系方程式(5)に、制御理論の Kalman filter 理論を応用すれば、$\mathbb{h}$ の最適推定値は次のように逐次求められる。（この報文では、本来状態量 $\mathbb{X}$ の推定に適用さるべき Kalman filter を、状態方程式(1)を書き直して $\mathbb{h}$ の推定に用いている。）

$$\hat{\mathbb{h}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbb{h}}(k|k) + \mathbb{K}(k+1)[\mathbb{Z}(k+1) - \mathbb{M}(k+1)\hat{\mathbb{h}}(k|k)] \qquad (7)$$

ここに、Kalman gain は次式により与えられる。

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{K}(k+1) = \mathbb{P}(k+1|k)\mathbb{M}^T(k+1)[\mathbb{M}(k+1)\mathbb{P}(k+1|k)\mathbb{M}^T(k+1) + \mathbb{Q}(k+1)]^{-1} \\ \mathbb{P}(k+1|k) = \mathbb{P}(k|k) + \mathbb{R}(k), \quad \mathbb{P}(k|k) = [\mathbb{I} - \mathbb{K}(k)\mathbb{M}(k)]\mathbb{P}(k|k-1) \end{array}\right\} \qquad (8)$$

ここに、$\mathbb{P}$：推定誤差共分散行列，$\mathbb{R}\cdot\mathbb{Q}$：雑音共分散行列。Kalman filtering の意味を Fig. 1 に示す。



カルマン・フィルターの状態推定フロー

IV. 大気汚染地域への適用 ： 岡山県水島工業地区での観測資料による上記理論の適用結果を Fig. 3 に示す。この理論の適用性は図にみるように非常に良い。しかも、将来の風向、風速が与えられないのはむろんのこと、排煙量すら与えられていない。ただ数点での濃度の刻々の記録とし点での風速記録を用いたにすぎない。

予測精度を高めるために、濃度の一日平均パターンからのズレを問題とし、また一点のみのデータよりはある程度隔った数個所の同時予測を行うなどの工夫が必要であった。

V. 謝辞 ： 本研究を行うにあたっては機械振興協会新機械システムセンター・APMS開発委員会（坂上委員長お茶水女子大教授）の援助を受けた。また一部分文部省特定研究環境制御（大気拡散プロセス、代表者近藤次郎東京大学教授）の補助を受けた。あわせて、厚く謝意を表する。

SO_2・風速の日変化（昭和45年7月の平均）（鹿島地区 042）