

九州大学 工学部 正員 上田 年比古, 〇正員 神野 健二

〔序〕 本報では地下密度流運動を塩分の移流分散現象と考へDarcyの法則, 連続の式, 分散方程式を差分化し数値計算を行なった。Pinder, Cooper¹⁾の用いた分散方程式を特性曲線を利用して解く計算法は移流項をexplicit or implicit法で差分化するよりも安定で精度も高いことが考えらる。とくに移流項が分散項よりも卓越するような場合には分散方程式は放物型よりも双曲型方程式としての性質が強くなるために移流項の差分化の際に生じる位相誤差が問題となるが, 特性曲線としての移流分散粒子を使うとこの位相誤差の発生は非常に小さい。

1 基礎式と差分化

記号 λ : 空隙率, k : 透水係数, μ : 粘性係数, $\rho(x,y,t)$: 密度, $C(x,y,t)$: Euler表示の塩分濃度, $C(R,t)$: Lagrange表示の塩分濃度, R : 粒子番号, $p(x,y,t)$: 圧力分布, $u(x,y,t), v(x,y,t)$: 流速分布, D_1, D_2 : 縦横分散係数, S_{ij} : 格子点 (i,j) の占める領域, n : 時間ステップ数,

連続の式

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

Darcyの法則

$$\mathbf{U} = -\frac{k}{\mu \lambda} (\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{g}) \quad (2)$$

分散方程式

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla C = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (3)$$

密度と濃度との関係

$$\rho(x,y,t) = \rho_0 + (1-E) \times C(x,y,t), \quad E \approx 0.3 \quad (4)$$

次に差分化と算定過程をのべると

① 圧力分布の計算: (2)式を(1)式に代入し諸係数が一定値であるとすれば $\nabla^2 p + \rho \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5)$

α を緩和係数(1.5)として加速リーマン法では次のようになる。

$$p_{ij}^{n+1} = \frac{(\Delta y)^2}{2(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \{p_{i,j+1}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1}\} + \frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \{p_{i+1,j}^{n+1} + p_{i-1,j}^{n+1}\} + \frac{(\Delta x)(\Delta y)}{2(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} (p_{i+1,j+1}^{n+1} + p_{i-1,j-1}^{n+1}) \quad (6)$$

$$p_{ij}^{n+1} = p_{ij}^{n+1} + \alpha (p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n)$$

② 流速分布の計算: (2)式より $u_{ij}^{n+1} = -\frac{k}{\mu \lambda} \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{2(\Delta x)}, \quad v_{ij}^{n+1} = -\frac{k}{\mu \lambda} \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{2(\Delta y)} - \frac{k \rho}{\mu \lambda} p_{ij}^n \quad (7)$

③ 分散粒子の移動: 各格子点領域を図-1のように定義する。 (i,j) 点に対してR番粒子の座標値が $i\Delta x - \frac{1}{2}\Delta x \leq X^R(R) < i\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x, \quad j\Delta y - \frac{1}{2}\Delta y \leq Y^R(R) < j\Delta y + \frac{1}{2}\Delta y$ をみたすときRは領域 S_{ij} の中にあるものとする。さて粒子の移動時間の選定であるが、いまある長さとして Δt_{n+1} を $\Delta t_{n+1} \delta / |\mathbf{U}|_{\max}, \quad |\mathbf{U}|_{\max} = \max \{ (u_{ij}^{n+1})^2 + (v_{ij}^{n+1})^2 \}^{1/2}$ とする。たとえば一次元流で u が t のみの関数であるときには図-2のように特性曲線上で Δt_{n+1} が決められ、 Δt_{n+1} は現象の変化の大小に応じて変化することになる。なお一般には流速の最大値で Δt を決めるのでより小さな流速で動く粒子はその特性曲線上で対流方程式の安定条件 $\Delta t \cdot u / \Delta x \leq 1$ を満たしていることになる。 Δt_{n+1} によって粒子の新しい位置は

$$X^{n+1}(R) = X^n(R) + \Delta t_{n+1} u_{ij}^{n+1}, \quad Y^{n+1}(R) = Y^n(R) + \Delta t_{n+1} v_{ij}^{n+1} \quad (8)$$

④ 分散方程式の差分化: (3)式により Δt_{n+1} 時間における塩分散量 ΔC_{ij}^{n+1} を計算する。③で移動した粒子が図-1に示すようにあらたに S_{ij} に入ってくると (i,j) 点の塩分濃度はこれから粒子の持つ塩分濃度の算術平均 $\bar{C}_{ij}$ で与えられる。したがって(3)式から塩分散量 ΔC_{ij}^{n+1} が

$$\Delta C_{ij}^{n+1} = \Delta t_{n+1} \left\{ D_1 \frac{C_{i+1,j}^{n+1} - 2C_{ij}^{n+1} + C_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + D_2 \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - 2C_{ij}^{n+1} + C_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right\} \quad (9)$$

$$\text{分散粒子の塩分濃度は } C^R(R) = \bar{C}(R) + \Delta C_{ij}^{n+1} \quad (10)$$

$$\text{固定格子点の塩分濃度は } \bar{C}_{ij}^{n+1} = \bar{C}_{ij}^n + \Delta C_{ij}^{n+1} \quad (11)$$

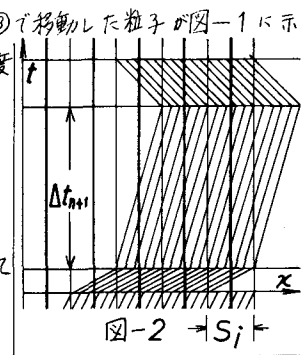
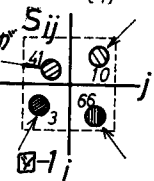
この式からわかるように $\bar{C}_{ij}^{n+1}$ は用いず $\bar{C}_{ij}^n$ を用いるので $\bar{C}_{ij}^n$ が異常な数値であっても $\bar{C}_{ij}^{n+1}$ には直接影響がない。

2 一次元非定常分散方程式への適用

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (12); \quad t > 0, x = 0, C = 1.0, x \rightarrow \infty, C = 0, \quad t = 0, x \geq 0, C = 0 \quad \text{に対する解析解は}^{2)}$$

$$C(x,t) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{x-ut}{2\sqrt{Dt}} \right) + e^{\frac{ux}{D}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x+ut}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\} \quad (13)$$

$u = 0.046 \text{ cm/sec}, D_1 = 0.089 \text{ cm}^2/\text{sec}, \Delta x = 3.4 \text{ cm} (= \text{全長}(170 \text{ cm}) \times \frac{1}{50}),$ 分散粒子総数=251個で数値計算する。図-3では実



step	*coord.	analytical(上段)	numerical(下段)
1	6726	24.59	4.20 0.01 0.01 0
	54.67	21.09	4.33 0 0 0
3	95.06	82.20	61.07 37.15 17.86 6.63
	93.57	78.54	55.99 33.03 15.53 5.61
5	98.68	95.45	88.01 75.53 58.81 40.66
	98.76	95.19	86.88 71.21 55.30 39.31
7	99.70	98.72	96.31 91.48 83.38 71.79
	99.65	98.62	96.22 90.63 81.28 69.00
9	99.91	99.62	98.83 97.30 91.79 88.26
	"	99.58	98.73 96.97 93.47 87.23
15	100.0	99.99	99.96 99.88 99.71 99.35
	"	"	99.95 99.87 99.69 99.30

Figure 4 is a graph showing the relationship between the particle number X and the concentration C . The y-axis is labeled C and the x-axis is labeled $X = X - ut$. The curve is labeled "analytical" and shows a decreasing trend. The graph is titled "n=15steps (1108.7sec)".

Figure 1 is a line graph showing the change in the number of particles (N) over time (t) for three different particle numbers: 10, 240, and 26. The y-axis is labeled N and has tick marks at 0.5 and 1.0. The x-axis is labeled $Time$. The curve for $N=10$ shows a sharp initial drop followed by a gradual rise. The curve for $N=240$ shows a sharp initial drop followed by a gradual rise. The curve for $N=26$ shows a sharp initial drop followed by a gradual rise. A vertical line segment labeled ΔX is shown on the $N=240$ curve, with a horizontal line segment labeled t below it.

計算条件および境界条件は図-6に示す。 $\Delta X=6.8\text{cm}(=\frac{170\text{cm}}{25})$, $\Delta Y=3.4\text{cm}(\frac{85\text{cm}}{25})$ で淡水、塩水側ともに静水圧分布を仮定している。求塩境界面が不安定になって混合現象が始まった場合には完全二相流としてのLaplaceの式は満足されない。逆に求塩境界面は分散現象で分散係数が変わって小さい場合に見られるものと考えると本計算法の適用が可能である。塩分侵入を表現するには塩水側入口で計算ステップごとに新たに分散粒子

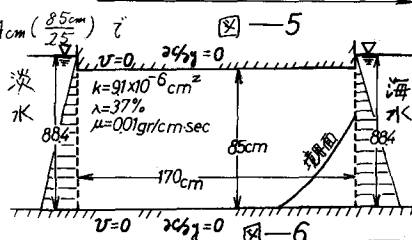


Figure 1 is a geological cross-section diagram showing the profile of a fault. The diagram includes a vertical scale on the left with time markers: 10%, $\delta = \Delta X / 2$, 298 sec, 119 sec, 153 sec, 267 sec, 225 sec, and 189 sec. A horizontal scale at the top right indicates a distance of 64.6 cm. The profile shows a fault line with various segments and a vertical displacement of 26 sec. A note at the bottom left indicates "爐水側" (Boiler side) and $x=34$.

$D_1=0.0071$		$D_2=0.0071$		$D_1=D_2=0.00$	
	0	0	0	0	0
	0	1	10	28	90
cm/sec	0	2	15	86	100
	0	3	19	82	100
	0	3	19	90	100
261	0	5	16	89	100
sec	0	8	20	88	100
	0	6	30	88	100
	0	12	58	91	100
0	2	14	54	92	100
0	3	18	74	95	100
0	3	16	84	97	100
0	6	19	85	97	100
0	4	18	79	98	100
0	8	18	87	98	100
0	1	10	56	91	99
0	1	12	61	92	99
0	2	13	74	97	100
0	4	30	87	95	100

参考文献 1) "Numerical Technique for Calculating the Transient Position of the Saltwater Front" G.H. Pinder, H.H. Cooper. Water Resources Research, vol 6-3, 1970, June
2) "A Solution of the Difference Equation of Longitudinal Dispersion in Porous Media" A. Gupta, R.B. Banks. Geophysical Survey Professional Paper 411-A