

北海道大学工学部

正会員

吉田静男

① 二層内に発生する波動伝播速度の方程式

ここでは、意図的に造られた内部波の伝播速度を予測し理想化された二層モデルをもとにして求めた、二層系波動伝播速度の式が与える結果との比較を試み、さらに式のもつ物理的な性質についても若干考察される。

波動は正弦波とし、考える流体場は $\Delta\phi=0$ が成立するものとする。 $\Delta\phi=0$ を満足する ϕ としては、 $\phi=(A_{n1}e^{my}+A_{n2}e^{-my})e^{i m(x-ct)}$ を採用することにする。流速分布については、短波の場合に可成問題となるであろうが、一応上下層共鉛直方向に一樣であるとしよう。与える波動が無限小であれば、二層系でも N 層系でも各境界面での運動条件、力学条件は同じ考え方ができる故、しばらくの間、Fig.1 に示す様な N 層系を考察することにする。 $n+1$ 番目の境界 $y=h_{n+1}$ では次の運動条件、力学条件が成立する。

$$\partial\eta_n/\partial t + U_{n0}(\partial\eta_n/\partial x) = -\partial\phi_n/\partial y \quad \dots (1)$$

$$\partial\eta_{n+1}/\partial t + U_{n+1,0}(\partial\eta_{n+1}/\partial x) = -\partial\phi_{n+1}/\partial y \quad \dots (2)$$

$$P_n(\partial\phi_n/\partial t) + P_n U_{n,0}(\partial\phi_n/\partial x) - P_n g \eta_{n+1} = P_{n+1}(\partial\phi_{n+1}/\partial t) + P_{n+1} U_{n+1,0}(\partial\phi_{n+1}/\partial x) - P_{n+1} g \eta_{n+1} + T_{n+1}(\partial^2\phi_{n+1}/\partial x^2) \quad \dots (3)$$

ただし最上層の上限は無限度とし最下層底部は固体壁で速度は zero とする。こうすることにより ϕ_1 及び ϕ_n の任意定数をそれぞれ 1 個にすることが出来る。ここで二層系にもどると、上記方程式は次のごとく表わせる。

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1\alpha_1 & -\delta_1 & -\alpha_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2\alpha_2 e^{mh_2} & \delta_2\alpha_2 e^{mh_2} & -\delta_2 & -\alpha_3\delta_2 \\ 0 & 0 & e^{-mh_2} & -e^{-mh_2} & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ H_1 \\ A_{21} \\ A_{22} \\ H_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots (4)$$

ここで最上層の値は小さいとして $\delta_1=0, \alpha_1=0, T_{32}=0$ とおけば波速の式は係数行列式 A を zero とおくことによって次の様に得ることが出来る。

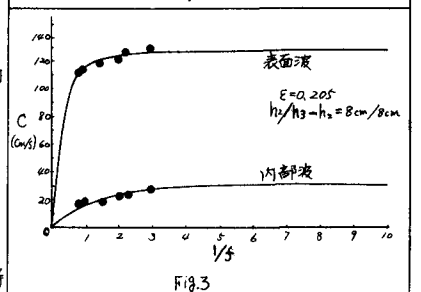
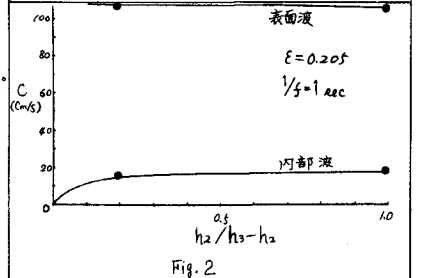
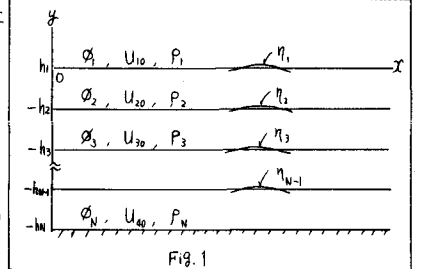
$$A = \delta_2\alpha_2^2 + (\alpha_3^2 d_1 d_2 - \delta_2 d_1 d_1 - \delta_2 d_1)\alpha_2^2 - \delta_1\alpha_3^2 d_2 + \delta_1\delta_2 = 0 \quad \dots (5)$$

$$\text{ゆえに } \alpha_2^2 = (1/2\delta_2) \left[-d_1 \{ (\alpha_3^2 d_2 - \delta_2) - \delta_2 \delta_1 \} \pm \sqrt{d_1^2 \{ (\alpha_3^2 d_2 - \delta_2) + \delta_2 \delta_1 \}^2 + 4\delta_2 \delta_1 X} \right] / \left[(\alpha_3^2 d_2 - \delta_2)(1-d_1^2) \right] \quad \dots (6)$$

この段階で $mh_2 \ll 0$, $mh_2 \gg 0$ とおけばそれぞれ長波短波に関する式が得られることはいうまでもない。(5) 式の一般的な性質を調べるため、 C について陽に書き直すと、次式が得られ、浜田・加藤氏による波速式と一致する。

$$\begin{aligned} & \{ (1-\epsilon) + d_1 d_2 \} C^4 - 2 \{ (1-\epsilon) U_{20}^2 (U_{20} + U_{30}) d_1 d_2 \} C^3 + \{ (\alpha_1 - \epsilon) U_{20}^2 + \{ (U_{20} + 2U_{30})^2 - 3U_{30}^2 \} d_1 d_2 - (g/m)(d_1 + d_2) \} C^2 \\ & - 2 \{ 2U_{30}^2 (1-\epsilon) + U_{20} U_{30} (U_{20} + U_{30}) d_1 d_2 - (g/m)(U_{30} d_1 + U_{20} d_2) \} C + \{ U_{20}^2 (1-\epsilon) + U_{20}^2 U_{30}^2 d_1 d_2 - (g/m)(U_{20}^2 d_1 + U_{30}^2 d_2) + \epsilon(g/m)^2 \} = 0 \quad \dots (7) \end{aligned}$$

A: 任意定数 H: 振幅 T: 界面張力 $a := \sinh m(h_3 - h_2)$ $\delta := \cosh m(h_3 - h_2)$ C: 波速 $d_1 := \cosh mh_2$ $d_2 := \cosh m(h_3 - h_2)$ ϵ : 振動数 g : 重力加速度 h : 境界面座標 i : 虚数単位 m : 波数 t : 時刻 U_{n0} : n 層の鉛直断面一様流速 x, y : 座標 ϕ : 速度ポテンシャル $\alpha_n := U_{n0} - C$ $\delta_n := P_n / P_{n+1}$ $S_n := \{ (P_{n+1} - P_n) / m + T_{n+1} m \} / P_{n+1}$ $\epsilon := 1 - P_2 / P_3$ $\eta_n = H_n e^{i m(x-ct)}$ Surface: n : N 層又は n 番目の境界の量 ρ : 密度



② (7)式の一般性

i) $U_{20}=U_{30}=0$ の場合

この場合、(7)式は $\{(1-\varepsilon)+d_1 d_2\} C^4 - (g/m)(d_1+d_2) C^2 + \varepsilon(g/m)^2 = 0$ となるが、一例として、 $\varepsilon=0.205$, $1/4=1s$ の場合について、 C 対 h_2/h_3-h_2 の関係を図示すれば Fig.2 となる。(以下図中実線カーブは計算値を示す。) さらに、 $\varepsilon=0.205$, $h_2/h_3-h_2=8\text{cm}/8\text{cm}=1$ の場合について C 対 $1/4$ の関係を求めると、Fig.3 となり、 $h_2/h_3-h_2=8\text{cm}/8\text{cm}=1$, $1/4=1s$ の場合について C 対 ε の関係を求めると Fig.4 となる。これらの計算結果から、有限水深の場合には $h_2/h_3-h_2=1$ 及び $1/4=\infty$ で内部波が最大となり、 $h_2/h_3-h_2=1\sim 0.3$, $1/4>3s$ では、ほぼ一定の波速になってしまうこと、及び ε についてはほとんど直線的に $\varepsilon=0$ から $\varepsilon=1$ にかけて、増大することが分かる。特に、この C 対 ε の関係は特徴的であり注目に値する。少し見方を変えて ε をパラメーターとして、 C 対 λ の関係を示したものが Fig.5 であるが、これによれば ε の効果は、放物形の関数を規定するものといえる。

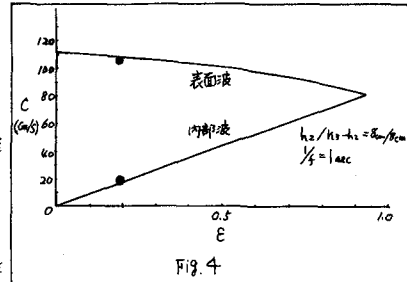


Fig. 4

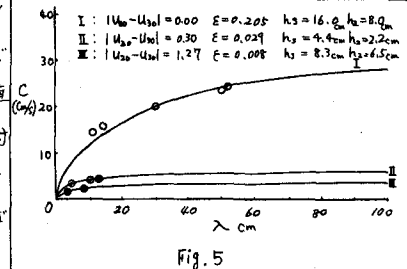


Fig. 5

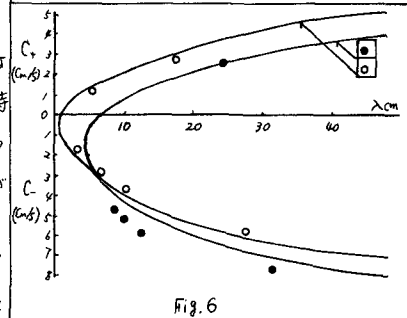


Fig. 6

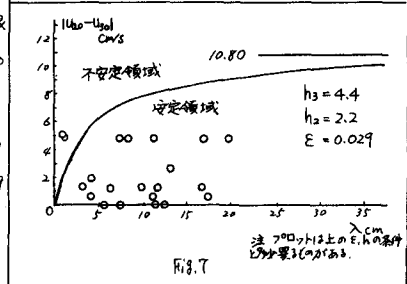


Fig. 7

ii) $U_{20} \times U_{30} \neq 0$ の場合

この場合 U_{20} , U_{30} の値が、i) に述べた特徴の根本を変えてしまうことはほとんどないが、波速そのものには大きな影響を与えることになる。特に $|U_{20}-U_{30}| \neq 0$ の場合には、全く別種の、波動の振幅を単調に変化させる効果、いわゆる Helmholtz の不安定を生じさせる。この様子を示したのが Fig.6 であり、 $|U_{20}-U_{30}|$ が大なるほど、カーブは C 軸を離れ右下に移行し、ある入に対して実数解を持たない領域 (Helmholtz 不安定領域) を生じてしまうことが分かるであろう。($U_{20}-U_{30}$) の絶対値だけでなく、その符号を考慮することも重要である。今 $(U_{20}-U_{30}) > 0$ なる場合、(7)式を満足する重根 G があるでしょう。次に $(U_{20}-U_{30}) < 0$ とおくと (7) 式のうち奇数中の C の係数のみ符号を変えてしまうから、 $-C_1$ が根となり以前同様重根である。つまり波速は C_1 から $-C_1$ になってしまうが重根のままであり、Helmholtz の不安定条件が $|U_{20}-U_{30}|$ に関係することが分かる。一例として、 $\varepsilon=0.029$, $h_2/h_3-h_2=2.2\text{cm}/2.2\text{cm}=1.0$ の場合について、 $|U_{20}-U_{30}|$ と λ を使用して、Helmholtz の不安定領域を示すと Fig.7 のごとくなる。

③ 実験結果及び解析

水槽は $10\text{cm} \times 25\text{cm} \times 70\text{cm}$ の透明アクリル樹脂製であり、流体は淡水、塩水、油を用いた。造波は主として、境界面におかれた物体を振動させることにより発生させ、波面のプロファイルは波を通過した平行光線を直接印画紙に焼き付ける方法でとらえた。この Shadowgraph から波長を読み取り、振動数をかけて求めた C が Fig.2~7 中のプロットである。データは、ほとんど中間波に属するものであるが、実測値と計算値の一致度は良いといえる。しかし特に問題をかかえている短波側のデータがあまりにも少なく、波長全域にわたる考察は今後の課題として残さざるを得ない。Fig.7 のプロットは、その点における波長 λ の内部波が、同じ点の $|U_{20}-U_{30}|$ のもとで存在していたことを示すものであるが、特に Helmholtz 不安定領域に存在する数個の内部波には注目すべきであろう。結びにあたり、数値計算を数多くしていただいた北大工学部技官藤 亮宏氏に深く感謝の意を表します。

1) 浜田・加藤：第9回海岸工学講演会講演集(1962).

2) Lamb, H.: Hydrodynamics 6th. ed. P.374.