II-165 流下方向密度勾配が流れに及ぼす影響について

九州大工 正員 粟谷陽一 長崎大工 正員 ○古本勝弘

I. まえがき

河川感潮部には外海からの塩水侵入があり一般に流下方向鉛直方向共に密度勾配を有する。その塩水侵入の形態は河水と海水との混合状態を示す塩分分布形状から弱,緩,強混合型と大きく分けて論じられる。塩分分布について弱混合型は二層流として,強混合型は一次元の拡散問題として解析的取り扱いが一般になされている。緩混合型は上記二者の中間に存在するというだけで解析手段として確立されたものは無い様である。また,この型に属す領域を全て取り扱うことになれば必然的に弱混合から強混合をも包含するものとなり徒らに複雑なものとなろう。しかし緩混合型でも範囲を限定すれば現象に支配的な要因から比較的単純な法則性を見出せるかも知れない。この様な試みとして,かなり強混合に近い緩混合領域を対象に数値計算から速度分布,密度分布及び見掛けの拡散係数について検討した。

II. 設定モデルと理論

座標軸は河床流下方向に x-軸,これに垂直上方に z-軸を取り流れはこの面内の二次元流とする。強混合型の流れでは密度は x だけの関数 $\rho(x)$ として扱いうる。混合がこれより弱くなり緩混合に移行した流れで注目すべき現象は,$\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)$ に原因する交換流,この交換流と z-方向の乱流混合との釣合いによる鉛直密度分布 $\rho(z)$ の形成 および $\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)$ の存在による鉛直混合強度の減少等である。以上のことを考慮しながら強混合に近い緩混合流れを対象に定常な等流を考える。

x-方向には一定の密度勾配 $\frac{\partial\rho}{\partial x}=\rho'$ をもつと仮定し,z-方向密度偏差成分を $\rho_1(z)$ で表わすと密度は (1) で示される。

$$\rho = \rho_0 + \rho' x + \rho_1(z) \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

水面勾配 i を微小とすると x,z-方向運動方程式は夫々,

$$\rho g i - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right) = 0 \quad \cdots (2) \qquad -\rho g - \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0 \quad \cdots (3)$$

(1)(3)より $p = g(\rho_0+\rho' x)(h-z) + g\int_z^h \rho_1\, dz \quad \cdots (4)$ $\therefore \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \rho' g (h-z) \quad \cdots (5)$

(5)を(2)に代入し $z=h$ (水表面)で $\tau=0$ の条件から次式を得る。但し ρ の成分中 ρ_0 が大半を占めることから $\rho \doteqdot \rho_0$ とした。

$$\tau = \rho_0 g i (h-z) - \frac{1}{2}\rho' g (h-z)^2 = \rho_0 u_*^2\left\{\left(1-\frac{z}{h}\right) - \frac{\rho' g h^2}{2\rho_0 u_*^2}\left(1-\frac{z}{h}\right)^2\right\} \cdots (6)$$

こゝに $\rho_0 u_*^2 = \rho_0 g h i$ (一様密度の底面剪断力)とおいた。

密度の輸送或いは拡散の現象は水流の乱れに負うところ大であり,乱れの強度は $\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)$ の存在により大きく影響されると考えられており乱れのエネルギーについて検討する必要がある。

乱れの基礎式は栗原教授により与えられ,その応用例は椿教授の論文に見られる。これらによると平衡状態の乱れエネルギーの基礎式として開水路密度流に主要な項のみを取ると

$$\tau \cdot \frac{du}{dz} = \rho_0 \frac{w'^3}{l} - \beta l w' g \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

こゝに w' は z-方向乱流速度,l は混合距離,β は定数である。左辺は平均流より渦動エネルギーの発生する割合,右辺第1項は流体粘性によるエネルギー消失割合,第2項は重力に対してなす仕事の割合を夫々表わす。渦動粘性係数(ε_m)と渦動拡散係数(ε_d)が等しいとすると一般に

$$\varepsilon_m = \varepsilon_d = w' l \cdots (8) \qquad \tau = \rho_0 l w' \frac{du}{dz} \cdots (9) \qquad j = -l w' \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdots (10)$$

こゝに j は密度輸送量である。(9)を(7)に代入すると

$$l^4\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = \frac{\tau^2}{\rho_0^2} - \beta g l^4 \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)^2 \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_1}{dz} \quad \cdots\cdots (11)$$

ところで断面平均流速と共に移動する座標系に関する流速を新に u とすれば,一般に $\left(\frac{d\rho_1}{dz}\right) \gg \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) = \rho'$ であるから,密度の保存式は

$$\rho' u = \frac{d}{dz}\left(l w' \frac{d\rho_1}{dz}\right) \qquad \therefore \rho' \int_0^z u\, dz = l w' \frac{d\rho_1}{dz} \quad \cdots (12)$$

(12)に(9)を代入して $\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{d\rho_1}{dz} = \frac{\rho'}{\tau}\cdot\frac{du}{dz}\int_0^z u\, dz \quad \cdots\cdots (13)$

(13)を(11)に代入して ρ_1 を消去すれば

$$\frac{\tau^3}{\rho_0^3} = l^4\left(\frac{du}{dz}\right)^3 \cdot \left\{\frac{\tau}{\rho_0}\cdot\frac{du}{dz} + \beta g \cdot \frac{\rho'}{\rho_0}\int_0^z u\, dz\right\} \quad \cdots (14)$$

l を知ることができれば(6)を(14)に入れ速度分布を求め得る。l を算定するため,乱れの寿命時間は密度勾配に無関係であると仮定し,$\frac{w'}{l} = \frac{w_0'}{l_0}$ とおく。添字 $_0$ で密度勾配のない流れにおける値を示す。$\beta=0$ とおいた(14)と(9)から $\frac{w_0'}{l_0} = \frac{du_0}{dz}$ $\therefore \frac{w'}{l} = \tau/\rho_0 l^2\left(\frac{du}{dz}\right) \equiv \left(\frac{du_0}{dz}\right)$

$$\therefore l^2 = \tau/\rho_0\left(\frac{du_0}{dz}\right)\left(\frac{du}{dz}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

(15)を(14)に代入する。但し $\tau_0 = \rho_0 l_0^2\left(\frac{du_0}{dz}\right)^2$ とおいた。

$$\frac{\tau_0 \cdot \tau}{\rho_0^2 l_0^2} = \frac{du}{dz}\left\{\frac{\tau}{\rho_0}\cdot\frac{du}{dz} + \beta g \frac{\rho'}{\rho_0}\int_0^z u\, dz\right\} \cdots\cdots (16)$$

(16)に l_0,τ {(6)} を与えると流速分布が求められ,(13)を積分して ρ_1 を求め得る。

$$\rho_1(z) = \int_0^z \frac{\rho_0\rho'}{\tau}\cdot\frac{du}{dz}\cdot\left(\int_0^z u\, dz\right) dz + C_1 \quad \cdots (17)$$

積分定数 C_1 は $\int_0^h \rho_1(z)\, dz = 0$ を充すように決められる。

(16)(17)で流速と密度の分布が求められるが,この両者の相関から,ある断面を横切る密度の輸送が生じる。この輸送を流れ方向の見掛け上の拡散とみなし密度の平均輸送量を式示すると,

$$-D_L \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{h}\int_0^h \rho_1 \cdot u\, dz = \frac{1}{h}\int_0^h u \cdot \int_0^z \frac{\rho_0 \rho'}{\tau}\cdot\frac{du}{dz}\left(\int_0^z u\, dz\right) dz dz$$

故に

$$D_L = -\frac{1}{h}\int_0^h u \cdot \int_0^z \frac{\rho_0}{\tau}\cdot\frac{du}{dz}\left(\int_0^z u\, dz\right) dz dz \quad \cdots\cdots (18)$$

見掛けの拡散係数を与える(18)は,J. W. Elder が Taylor の拡散理論を開水路に拡張して得た式と当然の事ながら同様の式形である。

次に，$Z=h\cdot\zeta$，　$\ell_0=\kappa\cdot h\lambda(\zeta)$，　$u=\frac{u_*}{\kappa}\cdot\frac{d\phi}{d\zeta}$，
$\rho'=\frac{2\rho_0 u_*^2}{g h^2}\sigma$，　$\rho_1(z)=\frac{2\rho_0 u_*^2}{\kappa^2 g h}\sigma\psi(\zeta)$，　$\tau=\rho_0 u_*^2\chi(\zeta)$，
$D_L=\frac{u_* h}{\kappa^3}\cdot D$　で定義される無次元量を用いると，

(6) $$\chi(\zeta)=(1-\zeta)(1-\sigma+\sigma\zeta) \qquad \cdots\cdots(19)$$

(16) $$\frac{(1-\zeta)\chi}{\lambda^2}=\frac{d^2\phi}{d\zeta^2}\left\{\chi\cdot\frac{d^2\phi}{d\zeta^2}+2\beta\sigma\phi\right\} \qquad \cdots\cdots(20)$$

(17) $$\sigma\psi=\int_0^\zeta\frac{\sigma\phi}{\chi}\cdot\frac{d^2\phi}{d\zeta^2}d\zeta+C_2 \qquad \cdots\cdots(21)$$

(18) $$D=\int_0^1\psi\cdot\frac{d\phi}{d\zeta}d\zeta \qquad \cdots\cdots(22)$$

こゝに κ は Kármán 定数である。混合距離に関する Prandtl の仮定 $\ell_0=\kappa\cdot Z$ すなはち $\lambda=\zeta$ を用い (19)を(20)に代入して $\left(\frac{d^2\phi}{d\zeta^2}\right)$ に関する二次式を解くと

$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2}=\left\{\sqrt{(\beta\sigma\phi\zeta)^2+(1-\zeta)^3(1-\sigma+\sigma\zeta)^2}-\beta\sigma\phi\zeta\right\}\Big/\zeta(1-\zeta)(1-\sigma+\sigma\zeta) \qquad (23)$$

但し二次式の解に含まれる符号は $\left(\frac{d^2\phi}{d\zeta^2}\right)$ と χ とが同符号を持つべき条件から決められる。

Ⅲ. 計算結果と考察

無次元の速度勾配は (23) で与えられ，$\int_0^h u\,dz=0$ すなはち $\zeta=1$ で $\phi=0$ の条件の下に数値積分を行ない速度分布を得る。密度に対応する $\sigma\psi(\zeta)$ も $\int_0^h\rho_1(z)dz=0$ すなはち $\int_0^1\sigma\psi d\zeta=0$ を条件に (21) でもとめられる。β について浮流砂を扱った文献 2) では 7.0，非断熱的な大気乱流を扱った文献 3) では 6.0 と採られ好結果が得られている。これに従い $\beta=7.0$ とし σ をパラメータに計算した結果を $\frac{d\phi}{d\zeta}$，$\sigma\psi(\zeta)$，および D について Fig-1，2，3 に示す。σ すなはち ρ' が増すと交換流，二層流へと流状が変化する。$\sigma>0.2$ では解が存在せず，この範囲の流れは，少なくともこゝで対象とした強混合に近い流れの領域からは逸脱していることがわかる。河川感潮部で考えると下げ潮時の流れに相当する $0\leq\sigma\leq0.2$ では安定な流れとして存在し得るが，上げ潮時の流れに相当する $\sigma<0$ では密度の逆転が起り不安定，すなはち安定した定常等流としては存在し得ないであろう。

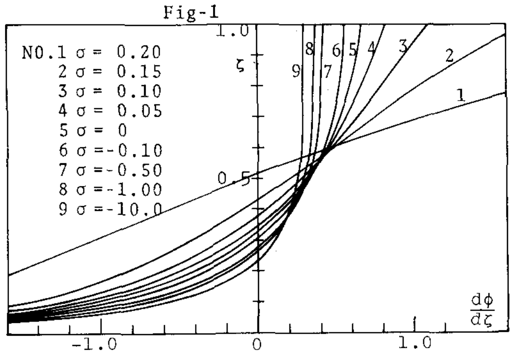

Fig-1

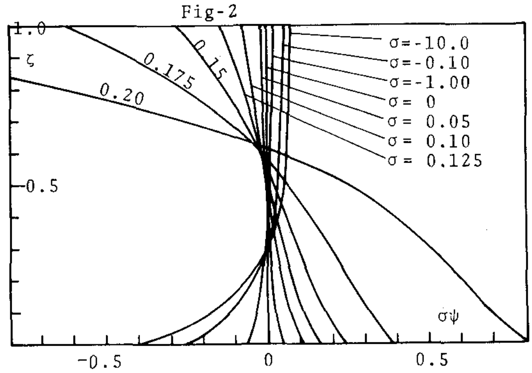

Fig-2

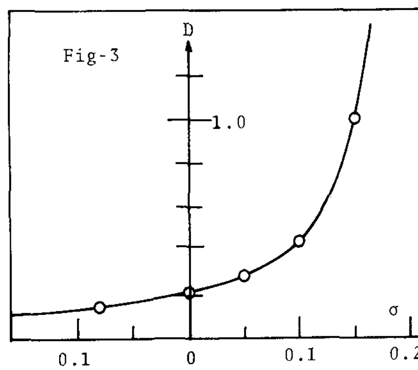

Fig-3

密度勾配のない開水路流れ（こゝでは $\sigma=0$ の流れに相当）における見掛けの拡散係数として，J. W. Elder は $D_L=5.86u_*h$ を与えている。Fig-3 において $\sigma=0$ では $D=0.216$，すなはち $\kappa=0.4$ とすると $D_L=3.38u_*h$ を得る。両者の相違は流速分布の与え方が若干異ることによる。σ の増加に伴ない D が急激に増大する様子は Fig-3 が示す通りである。強混合あるいは緩混合の河川において流下方向塩分分布から逆算された拡散係数は Elder 式が与える値よりかなり大きいとして報告されているが，密度流の影響を僅か受けても拡散係数としては大きな変化を示すことゝ一致する。

以上の理論展開で最も問題となるのは鉛直密度勾配を有する流れの混合距離 ℓ の与え方であろう。すなはち $\frac{w'}{\ell}=\frac{w_0'}{\ell_0}$ の仮定が妥当であるか否か検討を要す。

参考文献

1) 栗原道徳：渦動状態の確率論的新定義とその基礎方程式の誘導，　九州大学流研報告，1巻1号（昭.17）
2) 椿東一郎：浮流々砂が流れに及ぼす影響について，　土木学会誌，40-9，（昭.30.9）
3) Y. OGURA：Note of the Wind Velocity Profile in the Non-Adiabatic Atmosphere, Journ. Met. Soc. of Japan, vol 30 (1952)
4) J. W. ELDER：The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow,　Journ. Fluid Mechanics, vol 4 (1959)