II-125 開水路の限界流について

日本大学工学部 正員 木村喜代治

自然現象としての限界流の発生原理は *Leonard da Vinci*, *Fermat*, *Gauss* などに関係付けられると言はれ，また古くから多くの関連研究もなされた。限界水深などの計算定理はよく知られているように，定常流のとき，エネルギー法では

(1) Bresse (1860) による，水面勾配無限大 : $\frac{dh}{dx} = \infty$

(2) Bélanger (1849) による，最大流量 : $\frac{\partial Q}{\partial h} = 0$

(3) Böss (1919) による，最小比エネルギー : $\frac{\partial E}{\partial h} = 0$

である。また Bélanger の定理と Böss の定理の同時生起性については Jaeger の一般理論や，更にこれらの定理のもつ水理学的意義を一層明らかにした岩佐の研究などがある。

さて，本報は Bélanger, Böss の定理に関連した一つの簡単な解説を試みたものである。

流れの比エネルギーは

$$E = \lambda h \cos\theta + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \quad (1)$$

λ : Jaeger の圧力補正係数，α : Coriolis のエネルギー補正係数。式(1)は陰関数の形として

$$E - \lambda h \cos\theta - \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} = f(E, Q, h) = 0 \quad (2)$$

上式において，水深 h にある値 h_1 をとると，比エネルギー E と流量 Q の関係が決まり図-1の曲線 a が得られる。いま h をパラメーターとして同様な曲線群を描くと包絡線の存在することがわかる。包絡線 c の方程式は

$$f_h(E, Q, h) = 0 \quad (3)$$

と式(2)とより決定される。図-1において，包絡線 c により比エネルギーの関係の存在域と非存在域とに分けられる。すなわち，その境界条件が式(3)であることがわかる。また，図-1の曲線 a と b の交点として P が，この点 (E_P, Q_P) を通過するパラメーターの h は h_1, h_2 の二種類のみであることは容易にわかる。よって

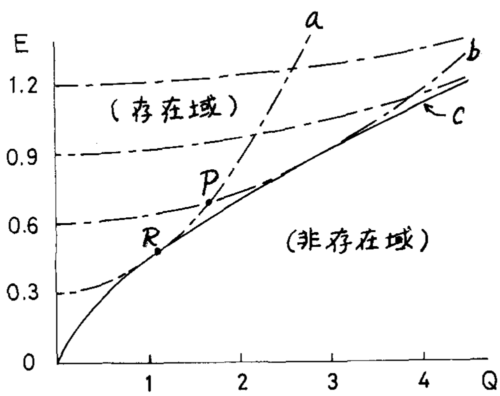

図-1

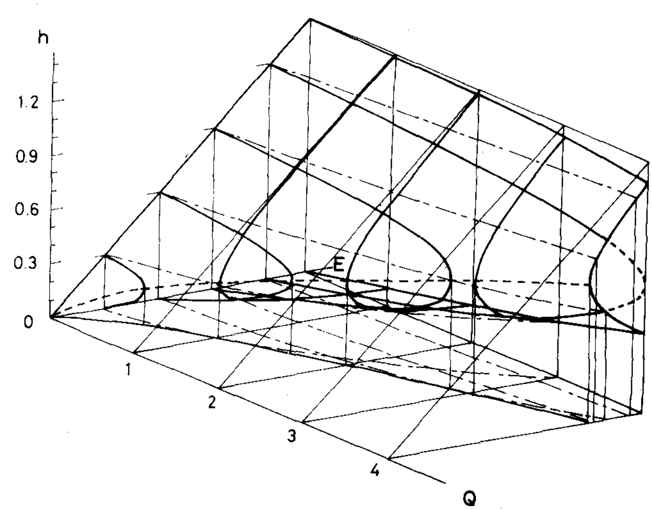

図-2

存在域内の任意の一点のE, Q を満足するhは二個あり，またC曲線上ではこれが一個になる。さて，ここでQ＝一定として直線を引くと存在域の内でEの値はC曲線上で最低値となり（Böss の定理），またE＝一定として直線を引くとQの値は存在域の内で最大値となることがわかる（Bélanger の定理）。C曲線上の点（例へばR）でQ＝一定とE＝一定の場合を考えれば両定理が同時に起こることも理解される（同時生起性）。

次ぎにE, Q, h を直交三軸に取って立体的に考えてみよう．$f(E, Q, h)=0$ を図に表わすと図－2のようになる。この曲面上で鎖線はh＝一定の線を結んだものである。同時にこれのE～Q平面への投影も表わしてある。図－1はこの投影図に当たる。図－2の破線は立体的に考えたときの境界曲線となる。この空間曲線は $f(E, Q, h)=0$ と $f_h(E, Q, h)=0$ の二つの空間曲面の交線として考えることが出来る。この交曲線は

$$\frac{D(f, f_h)}{D(E, Q)}, \quad \frac{D(f, f_h)}{D(Q, h)}, \quad \frac{D(f, f_h)}{D(E, h)} \qquad (4)$$

の何れかが0でなければ

$$E=\phi(h) \quad (5), \qquad Q=\psi(h) \quad (6)$$

で表わされる。すなわち，hを与えると対応するE, Qはそれぞれ一義的に決定される。さて式(2)で$E=E(Q, h)$ と考えると $f\{E(Q, h), Q, h\}=0$ 両辺をhで微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial h}+\frac{\partial f}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial h}=0 \qquad (7)$$

また同じく $Q=Q(E, h)$ と考えると $f\{Q(E, h), E, h\}=0$ よって両辺をhで微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial h}+\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial h}=0 \qquad (8)$$

式(7), (8) は Jaeger が Bélanger, Böss 定理の同時生起性を証明するときに用いたものである。$\frac{\partial f}{\partial E}\neq 0$ であるから $\frac{\partial f}{\partial h}=0$と $\frac{\partial E}{\partial h}=0$ は同時に起こり，また $\frac{\partial f}{\partial Q}\neq 0$ であるから $\frac{\partial f}{\partial h}=0$ と $\frac{\partial Q}{\partial h}=0$ は同時に起こる。すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial h}=0, \quad \frac{\partial E}{\partial h}=0, \quad \frac{\partial Q}{\partial h}=0$$

は同時に起こる。よって先きに導いた比エネルギーの存在域と非存在域の境界条件 $f_h=0$ は限界流の条件であることが一層明確にわかる。また $\frac{\partial f}{\partial h}, \frac{\partial f}{\partial E}, \frac{\partial f}{\partial Q}$ は $f=0$ の曲面の任意点における法線の，それぞれ h, E, Q 方向への方向余弦に比例する。また接線 $\frac{\partial E}{\partial h}$ の h, E, Q 軸に対する方向余弦はそれぞれ $1:\frac{\partial E}{\partial h}:0$ に比例する。同じく接線 $\frac{\partial Q}{\partial h}$ の h, E, Q 軸に対する方向余弦はそれぞれ $1:0:\frac{\partial Q}{\partial h}$ に比例する。よって式(7), (8)は二直線の直交条件を示していると見ることが出来る。よって このことからでも $\frac{\partial f}{\partial h}=0$, $\frac{\partial E}{\partial h}=0$, $\frac{\partial Q}{\partial h}=0$ とは同時に生起することがわかる。

運動量法における比力の関係も同様で

$$F-\lambda' h_g A\cos\theta-\frac{\beta Q^2}{gA}=g(F, Q, h)=0 \qquad (9)$$

λ'：Jaeger の圧力補正係数，β：運動量補正係数。前と同様に，hをパラメーターとすると比力FとQとにおいて包絡線が存在し，この関係の存在域と非存在域とに分けられる。この境界条件が $g_h=0$ であり，限界流の条件になる。

以上によって，比エネルギーの式を $f(E, Q, h)=0$ とすると $\frac{\partial f}{\partial h}=0$ がE～Q関係の存在域と非存在域との境界条件であり，また限界流の条件となる。これが Bélanger の定理，Böss の定理と同時生起性が一層明確になった。比力の場合も同じく $g(F, Q, h)=0$ とすると $\frac{\partial g}{\partial h}=0$ が同様な条件になることがわかる。