II-118　Implicit 差分法による洪水流解析における解の安定性についての2,3の考察

北大衛生工学科　正員　高畑征三郎

(1) はじめに

前報[1]では豊平川の洪水流の解析を念頭におきつつ、一様な放物線断面をもった水路が、横一様地表流をうけた場合を想定し、Implicit差分洪水追跡法を用いた場合、設定する条件の与え方および計算の精度が解の安定性、収束性に与える影響についての2,3の考察を行なった。解の収束性、安定性に影響すると思われる因子は次のようなものであろう。①計算精度　②初期条件　③境界条件　④差分の大きさ。特に④の影きょうを見るためには、現象の大きさを一般化する必要がある。今回は、無次元連続方程式と運動方程式とを用い、一様な矩形断面をもつ水路が横一様地表流をうけ、かつ、上流端が閉じられている場合の考察を行なった。

(2) 流れの方程式　　基本となるのは次の2式である。

連続式　$\partial A/\partial t + A\,\partial v/\partial x + v\,\partial A/\partial x - q = 0$　(1)

運動式　$\partial v/\partial t + v\,\partial v/\partial x + g\,\partial y/\partial x + g S_f - g S_0 + q v/A = 0$　(2)

ここで、A：流水断面積(m^2)，v：流速(m/sec)，y：水深(m)，g：重力の加速度(m/sec^2)，S_0：水路勾配

S_f：まさつ勾配(Manning式 $S_f = n^2 v^2/R^{4/3}$)，q：横一様流入量($m^3/sec/m$)，x：距り(m)，t：時間(sec)

上田博士[2]は(1),(2)式を無次元化するにあたり、ある標準降雨によって定常状態に達した時の下流端での値を標準値として採用した。同様な考え方で、今考える横一様流入量によっておこる洪水が等流状態で定常となった時の値を標準値とする。すなわち、次のようにおく。

$$x/L = \lambda\ ,\quad t/T_r = \tau\ ,\quad q/q_* = \varphi\ ,\quad Q/Q_* = \psi\ ,\quad v/v_* = \nu\ ,\quad A/A_* = \varsigma \qquad (3)$$

ここで、Q_*：定常状態に達した時の下流端流量、A_*, v_*：Q_*が等流状態で流れるとした時の流積、流速

T_r：流下時間，L：水路長，q_*：標準横一様流入量(その時考える流入量に等しくとる。すなわち $\varphi = 1$)

これらの標準値の間には次の関係が成立する。

$$\left.\begin{array}{l} Q_* = K A_*^{P}\ ,\ \text{矩形断面の場合}\quad P = 5/3\ ,\ K = \dfrac{\sqrt{S_0}}{n}\dfrac{1}{B^{2/3}}\ ,\ B\text{：水路巾},\ n\text{：粗度係数} \\ Q_* = q_* \cdot L\ ,\ A_* = q_* \cdot T_r\ ,\ v_* = L/T_r \end{array}\right\} \qquad (4)$$

以上のような標準値を用いて(1),(2)式を無次元化すると、

連続式　$\partial\varsigma/\partial\tau + \varsigma\,\partial\nu/\partial\lambda + \nu\,\partial\varsigma/\partial\lambda - 1 = 0$　(5)

運動式　$G\,\partial\nu/\partial\tau + G\nu\,\partial\nu/\partial\lambda + J\,\partial\varsigma/\partial\lambda + \nu^2/\varsigma^{4/3} - 1 + G\nu/\varsigma = 0$　(6)

ここで、$G = L/(g S_0 T_r^2)$，$J = (q_* L/K)^{3/5}/(L I B)$

(3) 差分表現　　水路をN等分に分割し、水路方向にi，時間軸方向にjの添字をつける。$i = 1 \sim N$，jは既知値，$(j+1)$は未知値を示す。Amein[3]が用いた中心差分の表現を用いて、(5),(6)式を表わすと、$(j+1)$ stepでは、

連続式　$\varsigma_{i+1} + \varsigma_i + a_1 + \dfrac{\Delta\tau}{4\Delta\lambda}[\varsigma_{i+1}(2\nu_{i+1} + b_1) + \varsigma_i(-2\nu_i + c_1) + d_1\nu_{i+1} + e_1\nu_i + f_1] - 2\Delta\tau = 0$　(7)

運動式　$J(\varsigma_{i+1} - \varsigma_i + a_2) + \Delta\lambda/\Delta\tau\, G(\nu_{i+1} + \nu_i + b_2) + G/4(\nu_{i+1}^2 - \nu_i^2 + b_1\nu_{i+1} + c_1\nu_i + f_2)$

$+ \Delta\lambda/2\,(\nu_{i+1}^2/\varsigma_{i+1}^{4/3} + \nu_i^2/\varsigma_{i+1}^{4/3} + d_2) + G\,\Delta\lambda/2\,(\nu_{i+1}/\varsigma_{i+1} + \nu_i/\varsigma_i + e_2) = 0$　　$i = 1 \sim N$　(8)

ここで、$a_1 = -\varsigma_{i+1}^j - \varsigma_i^j$，$b_1 = 2\nu_{i+1}^j$，$c_1 = -2\nu_i^j$，$d_1 = 2\varsigma_{i+1}^j$，$e_1 = -2\varsigma_i^j$，$f_1 = 2\nu_{i+1}^j\varsigma_{i+1}^j - 2\nu_i^j\varsigma_i^j$，$a_2 = \varsigma_{i+1}^j - \varsigma_i^j$，

$b_2 = -\nu_{i+1}^j - \nu_i^j$，$d_2 = (\nu_{i+1}^j)^2/(\varsigma_{i+1}^j)^2 + (\nu_i^j)^2/(\varsigma_i^j)^2 - 4$，$e_2 = \nu_{i+1}^j/\varsigma_{i+1}^j + \nu_i^j/\varsigma_i^j$，$f_2 = (\nu_{i+1}^j)^2 - (\nu_i^j)^2$，(7)(8)式は$(j+1)$の添字を省略している。

(4) 境界条件　　上流境界条件　　上流端が閉じているような水路では次式で与えられる。

$$\varsigma_1 \cdot \nu_1 = \psi_b \qquad (9)$$

下流境界条件　　断面積と流速の何らかの関係を与えねばならない。ここではManning等流式を用いる。

$$\nu_{N+1} = \varsigma_{N+1}^{2/3} \qquad (10)$$

(5) 初期条件　　等流を仮定した。すなわち、水路の長さ方向のすべての点で次式が成立すると仮定する。

$$\nu = \zeta_0^{2/3} \tag{11}$$

方程式(7)〜(10)の(2N+2)個の非線型連立方程式をNewtonのくり返し計算法で解を求め、次々と時間stepを進める。

(6) 考察

前報[1]で計算精度として倍精度を採用すると解の安定性が改善されることが解ったので、今回は専ら、倍精度計算を行なった。

(6-1) 初期条件　　計算手順の性質上、初期条件を0(すなわちdry channel)とすることはできない。そこで、$\zeta_0 = 0.2\times10^{-2}$ の値付近でこの値を変えてみたが、解の安定性には、ほとんど影響しないことがわかった。また、この値は $\zeta_0 = 10^{-4}$ のオーダーまで下げると計算overflowがおこった。

(6-2) 境界条件　　○上流境界条件　　上流端の ψ_B 値もまた0とおくことはできない。そこで ψ_B 値を $10^{-2}\sim10^{-4}$ の間で変化させて計算したが、解の値にほとんど影響しなかった。適当な小さい値を仮定すればよい。

○下流境界条件　　前報[1]によりManningの等流式がより良好であることがわかったので、この表現を用いる。

(6-3) 差分値の大きさ　　以上のことに注意しても、なめらかな解が得られないことが多い。implicit法は(2N+2)元方程式の連立解を求める方法であり、explicit法のようにCourant条件に制約されず、自由に$\Delta\tau$、$\Delta\lambda$の大きさを選べると言われている。しかし、図-1, 2を見ると、これらの値が相当程度に解の安定性に関係していることがわかる。また、上流端付近の、値が急変する $i=1\sim2$ の間を2分割して計算したところ、わずかの改善が見られたので(図-1)、以後この間を2分割した。図-1は水路方向の分割数を10、すなわち $\Delta\lambda=0.1$ として$\Delta\tau$の値を変えたものである。この図から、明らかに$\Delta\tau$を大きくとればとる程、定常状態に達して後に、真値と思われる1.0の値から隔っていることがわかり、$\Delta\tau=0.333$とした場合、最大14%もの誤差を生ずる。なお、$\Delta\tau=0.0556$としたグラフは立ち上り部分が振動しているが、これは初期条件を等流とした仮定そのものによる集積誤差かも知れない。次に、図-2は$\Delta\tau=0.1667$とし、$\Delta\lambda$の値を変化させたものである。この図からわかることは、$\Delta\lambda$の値が大きくなる程、定常状態に達した後の解の安定性が良いようである。なお、図示していないが、$\Delta\tau=0.0556$とした場合、$\Delta\lambda$の値を0.25(4分割)、0.20(5分割)としても非常に良好な解が得られる。なお、implicit差分法は(2N+2)元連立方程式を線型化し、Gaussの消去法かSweep out法を用いて解を求める方法で、水路方向の分割数が2倍となれば、所要計算時間は4倍となる。一方、経験上、$\Delta\tau$が½となれば、所要時間は2倍となるのみで、所望の情報の許す限り、水路方向の分割数は少なくした方が特策であることが以上のことから言える。

(7) あとがき　　implicit差分法の解の安定性、収束性に関しては、未だ数学的に解明されておらず、現段階においては、経験的に良い方法を探究するしかない。以上の計算結果から、implicit法にも、解の安定性、収束性と$\Delta\tau$、$\Delta\lambda$の大きさの間に何らかの関係があるのではないかと思われる。さらに検討を進めたいと思う。

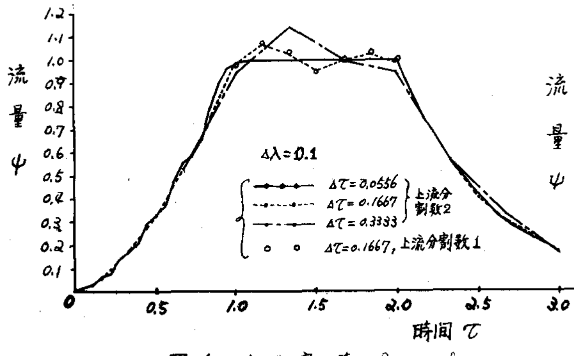

図-1　Δλが一定の時のhydrograph

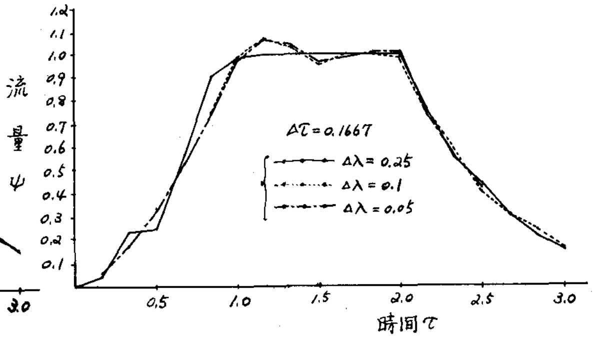

図-2　Δτが一定の時のhydrograph

参考文献

1) 高畑；才27回年講 昭和47年.　2) 上田年比古"降雨流出に関する基礎的研究"九大学位論文(S.36)　3) Amein；J.ASCE. 1970, Dec. HY12. P2491