II-116　洪水追跡法に関するグラフ理論的考察

京都大学工学部　正員　岩佐義朗
鳥取大学工学部　正員 ○常松芳昭

1．まえがき

洪水追跡に用いられる数学モデルは，対象とする河道系の幾何学的・水理学的諸条件によって，Dynamic Waveモデル，Kinematic Waveモデル，定常流による近似モデル，相関モデルなどに分けられる。

しかし，実際上，洪水追跡においては，河道系内の局所的な水理学的挙動がそれほど重要視されることはまれであって，むしろいくつかの地点における各種水理量が必要とされることが多い。このような場合には，洪水追跡の数学モデルは，各種の形の連続条件式と貯留方程式とを組み合わせた近似化モデル，すなわちパラメトリック・モデルで十分である。この種のモデルを用いるとき，分割河道断面での流量および区間貯留量を着目すべき状態変数と考えれば，河道系は集中定数系化され，グラフ理論による河道網系の洪水追跡技法の展開が可能となる。

本文は，典型的な一貯留方程式をとりあげ，これに立脚するシステム・モデルのグラフ理論による定式化を行ない，その数値計算法について考察したものである。

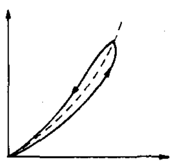
2．貯留方程式のグラフ理論的表示

開水路不定流に関して，区間貯留量～区間からの流出流量の関係を示す曲線は，一般に図－1に示すようにループ状になることは経験的に知られている。このような開水路貯留特性を考慮すれば，河道網系を図－2に示すような集中定数系要素の適当な連結でモデル化するとき，要素に対して流量保存則

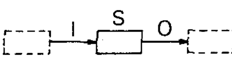
$$dS/dt = I - O \qquad \text{----(1)}$$

が成立するが，その貯留方程式はつぎの形式で表現することもできる[1)]。

$$S = K \cdot O^N + R \cdot dO/dt \qquad \text{----(2)}$$



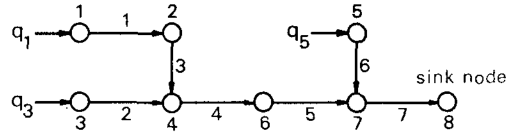
図－1　S～O関係の模式図



図－2　集中型モデル

ここに，S：区間貯留量，I：区間への流入流量，O：区間からの流出流量，K，R：係数，N：指数である。このうち，Rはくさび型貯留に影響を及ぼすいくつかの水路特性パラメータの関数であるが，特定のハイドログラフに対しては一定と仮定されるものである。(2)式において，係数Rを0とおいた式を用いることは，経験的な洪水追跡法のほとんどで仮定されている貯留量と流出流量との間の一価の関数関係を用いることに他ならない。

ところで，河道網系における流れの方向は定まっているから，集中型開水路系の要素(河道区間)を節点に，隣接した要素間の流れを定向枝に対応させ，これらを実際の河道網系の幾何学的平面構造にしたがって連結すれば，図－3に示すようないわゆる定向グラフがえられる。



図－3　定向グラフ

定向グラフに関して定義される出連結行列$\overset{+}{A}$，入連結行列$\overset{-}{A}$[2)]を用い，また，ベクトルを$V(v_i)$，行列を$M(m_{ij})$，対角行列を$F(f_{ij})$とするとき，成分として$v_i^{f_{ii}}$，$m_{ij}^{f_{ii}}$をもつベクトルと行列をそれぞれV^F，M^Fで書くことにすれば，(1)および(2)式に基づく洪水追跡の基礎方程式ともいうべきものは，行列とベクトルによって，つぎのように簡単に表わされる。

流量保存則：　$DS = q - (\overset{+}{A} - \overset{-}{A}) \cdot Q$ 　----(3)

貯留方程式：　$S = K \cdot (\overset{+}{A} \cdot Q)^N + R \cdot D(\overset{+}{A} \cdot Q)$ 　----(4)

ここに，S：区間貯留量ベクトル，Q：流量ベクトル，$\mathbf{q}$：ソース・ノードに対するシステム外力を表わすベクトル，K，R：係数を表わす対角行列，N：指数を表わす対角行列，D：時間微分演算子である。

3．システム・モデルの定式化

以下においては，簡単のために，対象とする河道網系のシステム・グラフは$(n+1)$個の節点とn本の定向枝から成る定向グラフであるとする。しかも，これはただ一つのシンク・ノードをもち，各節点は枝に関してただ一つの始点でしかないような幾何学的連結構造をもつものとする。実際上，これは河道網系が合流河道からのみ構成されることに相当している。このような仮定のもとでは，出連結行列$\overset{+}{A}$の各行の成分はただ一つの1をもち，他はすべて0であることを考慮すれば，(3)式と(4)式とにより次式がえられる。

$$R\cdot\overset{+}{A}\cdot D^2Q+N\cdot K\cdot(\overset{+}{A}\cdot Q)^{N-I}\cdot DQ+\overset{+}{A}Q=\mathbf{q}+\bar{A}\cdot Q \qquad ----(5)$$

ここに，Q：Qの成分を対角成分にもつ対角行列，I：単位行列である。(5)式において，左辺は節点からの流出流量のみに関係したものであり，右辺は節点外力ならびに節点への流入流量のみに関係したものである。したがって，(5)式を解いて各節点からの流出流量を枝の番号順に求めるとき，その右辺はつねに既知量であるようにすることができる。すなわち，定向グラフの任意の節点に関して，その節点の流出枝の枝番号は流入枝のそれよりも大きいように枝の番号付けを行なっておけばよい。いま，$R\cdot\overset{+}{A}$はn行n列の正方行列であるから，(5)式は

$$D^2Q=[R\cdot\overset{+}{A}]^{-1}\cdot[\mathbf{q}+\bar{A}\cdot Q-N\cdot K\cdot(\overset{+}{A}\cdot Q)^{N-I}\cdot DQ-\overset{+}{A}Q] \qquad ----(6)$$

となる。(6)式は，直接Runge－Kutter－Gill法を適用して数値解析することもできるが，各節点は定向枝に関してただ一つの始点であるという特徴に着目すれば，つぎに示す差分近似法によっても解かれうる。

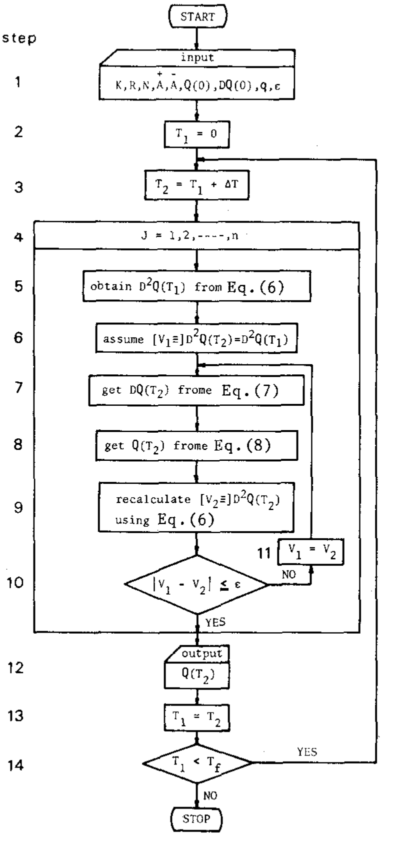
4．数値計算法

微少な時間間隔ΔT内で流量ベクトルQの各成分の曲率は近似的に線形変化すると仮定すれば，つぎの二つの時間差分式がえられる。

$$DQ(t_{i+1})=DQ(t_i)+\frac{\Delta T}{2}\{D^2Q(t_i)+D^2Q(t_{i+1})\} \qquad ----(7)$$

$$Q(t_{i+1})=Q(t_i)+\Delta T\cdot DQ(t_i)+\frac{\Delta T^2}{3}D^2Q(t_i)+\frac{\Delta T^2}{6}D^2Q(t_{i+1}) \qquad ----(8)$$

ここに，$Q(t_i)$：時刻t_iにおける流量ベクトルである。(6)，(7)および(8)式を用いて流量計算を行なう手順は図－4のフローチャートに示されるごとくである。これについて簡単に説明すれば，つぎのようである。step4：step5～11を枝の番号順に1からnまでくり返す。step5：(6)式により時刻T_1におけるJ番目の流量ベクトル成分の曲率$D^2Q(T_1)$を計算。step6：step5でえた$D^2Q(T_1)$を$D^2Q(T_2)$の第1近似値とする。step7：(7)式により$DQ(T_2)$の近似値を計算。step8：(8)式により$Q(T_2)$の近似値を計算。step9：step7，8でえられた近似値を用いて，(6)式により$D^2Q(T_2)$の新しい近似値を計算。step10：$D^2Q(T_2)$に関して，step6と9での計算値が等しいかどうか判定する。step11：step9でえた計算値を新しく$D^2Q(T_2)$の仮定値とする。



図－4　フローチャート

5．むすび

以上，本文では貯留方程式に基礎をおく洪水追跡法のグラフ理論による展開を試みたが，本技法の実際問題への適用にあたっては，システム・モデルのパラメータの決定等，残された問題点は少なくない。

1) Prasad, R.：A Nonlinear Hydrologic System Response Model, Jour. of the Hydraulic Div., Vol.93, No.HY4, 1967.
2) 小野寺力男：グラフ理論の基礎，森北出版株式会社，1968.