II-105　有限要素法による円柱まわりの流れの解析について

北見工大　正会員　佐渡公明

1.まえがき　有限要素法の流体力学への適用は，O.C.Zienkiewicz[1], J.T.Oden[2]らによって先駆的な研究がなされてきた。特にOdenの研究は連続体力学の立場からエネルギー保存則に立脚し，一般的な粘性流体解析のの定式化を行っている。しかしこれは，熱力学法則に熟知していないと難解なので，本文では構造力学でいう仮想仕事の原理に対応する解析を行い同様の式を導く。次に従来の研究は有限要素法による定式化そのものが大部分で，流体力学の立場から興味ある問題に対する適用は殆んどない。そこで本文では，流体中にある円柱の抗力係数とRe数との関係を数値解析することを目標として，第1段階で理想流体の流線について述べる。

2.粘性流体の定式化

要素内の流速，圧力，密度を節点値を用いて夫々次のように内挿補間する。

$$\mathbb{V}(x_i,t)=\sum_{N=1}^{Ne}\psi_N(x_i)\mathbb{V}^N(t)=\psi_N(x_i)\mathbb{V}^N(t) \quad (1)$$

$$p(x_i,t)=\varphi_N(x_i)\,p^N(t) \quad (2)$$

$$\rho(x_i,t)=\chi_N(x_i)\,\rho^N(t) \quad (3)$$

Ne：1要素の節点総数
$\psi_N,\ \varphi_N,\ \chi_N$：形状関数
$\mathbb{V}^N(t)$：節点Nの速度ベクトル $=v_i^N(t),\ i=1,2,3$

同一項内で繰返し使われた添字は，その最大個数まで積を作って加え合わすことを意味する総和規約を用いる。

一般に連続体の運動方程式は　$\rho\dfrac{Dv_i}{Dt}=\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho K_i$　(4)　ρ：密度　σ_{ij}：応力　K_i：単位質量当りの物体力

重み関数v_i^*, p^*も(1),(2)と同様に　$v_i^*=\psi_N v_i^{*N}$　(5)　　$p^*=\varphi_N p^{*N}$　(6)

(4)の両辺にv_i^*を掛け，要素内の領域V_eについて体積積分すると

$$\int_{V_e}\rho v_i^*\frac{Dv_i}{Dt}dv=\int_{V_e}v_i^*\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}dv+\int_{V_e}\rho v_i^*K_i dv$$

$\frac{D}{Dt}$はmaterial derivativeで，右辺第1項を部分積分して

$$\int_{V_e}\rho v_i^*(\dot v_i+v_m v_{i,m})dv=\int_{A_e}v_i^*\sigma_{ij}n_j dA-\int_{V_e}v_{i,j}^*\sigma_{ij}dv+\int_{V_e}\rho v_i^*K_i dv \quad (7)$$

ここに　$\dot v_i=\partial v_i/\partial t$　　$v_{i,m}=\partial v_i/\partial x_m$　　n_j：方向余弦　　$i,j,m=1,2,3$

(1)(3)(5)を(7)に代入して整理すると

$$v_i^{*N}\rho^M\dot v_i^L\int_{V_e}\chi_M\psi_N\psi_L dv+v_i^{*N}\rho^M v_m^L v_i^P\int_{V_e}\chi_M\psi_N\psi_L\psi_{P,m}dv$$
$$=v_i^{*N}\int_{A_e}\psi_N\sigma_{ij}n_j dA-v_i^{*N}\int_{V_e}\psi_{N,j}\sigma_{ij}dv+v_i^{*N}\int_{V_e}\chi_R\rho^R K_i\psi_N dv \qquad M,N,P,L,R=1,2,\cdots,Ne$$

右辺第1項の面積々分は，節点Nに於る応力によるi方向の力を表わし，右辺第3項の体積々分は，節点Nに於る物体力によるi方向の力を表わしているので，これらの和をP_{Ni}とおく。即ち

$$P_{Ni}=\int_{A_e}\psi_N\sigma_{ij}n_j dA+\int_{V_e}\chi_R\rho^R K_i\psi_N dv \quad (8)$$

また　$C_{MNL}=\int_{V_e}\chi_M\psi_N\psi_L dv$　　$d^m_{MNLP}=\int_{V_e}\chi_M\psi_N\psi_L\psi_{P,m}dv$　…(9)

とおくと，v_i^{*N}は任意であるから

$$C_{MNL}\rho^M\dot v_i^L+d^m_{MNLP}\rho^M v_m^L v_i^P+\int_{V_e}\sigma_{ij}\psi_{N,j}dv=P_{Ni} \quad (10)$$

ニュートン流体の場合　$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$　（μ：粘性係数　e_{ij}：歪速度　δ_{ij}：クロネッカーのデルタ）を(10)に代入し整理して

$$C_{MNL}\rho^M\dot v_i^L+d^m_{MNLP}\rho^M v_m^L v_i^P+h_{MNi}p^M+z_{MN}v_i^M+w^{ij}_{MN}v_j^M=P_{Ni} \quad (11)$$

$$h_{MNi}=-\int_{V_e}\varphi_M\psi_{N,i}dv \qquad z_{MN}=\int_{V_e}\mu\psi_{M,j}\psi_{N,j}dv \qquad w^{ij}_{MN}=\int_{V_e}\mu\psi_{M,i}\psi_{N,j}dv \quad (12)$$

他方連続の方程式は　$\dot\rho+(\rho v_i)_{,i}=0$　重み関数p^*を掛けV_eについて体積々分すると

$$\int_{V_e}p^*\dot\rho\,dv+\int_{V_e}p^*(\rho v_i)_{,i}dv=0 \qquad p^{*M}\Big(\int_{V_e}\varphi_M\chi_N dv\,\dot\rho^N+\int_{V_e}\varphi_M(\chi_N\psi_R)_{,i}dv\,\rho^N v_i^R\Big)=0$$

p^{*M}は任意であるから　$a_{MN}\dot\rho^N+b^i_{MNR}\rho^N v_i^R=0$　(13)

ここに　$a_{MN}=\int_{V_e}\varphi_M\chi_N dv$　　$b^i_{MNR}=\int_{V_e}\varphi_M(\chi_N\psi_R)_{,i}dv$　(14)

以上(11), (13)式が非定常,圧縮性粘性流体の基礎方程式になる。これはOdenが求めている式と一致する。[2]

なお境界条件は(8)より境界に接する要素に対し $P_{Ni} = -\int_{A_e} p n_i \psi_N dA + \int_{A_e} \tau_{ij} n_j \psi_N dA + \rho^R \int_{V_e} \chi_R K_i \psi_N dV$ (15)

3. 数値計算

(1) 円柱まわりの2次元理想流体の流線

理想流体の方程式は,ψを流れ関数として

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } V_e \qquad (16)$$

境界条件は

$$\psi = \hat{\psi} \quad \text{on } A_1 \qquad (17)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y = -v n_x + u n_y = \hat{g} \quad \text{on } A_2 \qquad (18)$$

(16)~(18)の方程式は,次の汎関数を(17)の下に最少にするψを求める問題と等価である。

$$\chi^e = \int_{V_e} \frac{1}{2}\{(\psi_{,x})^2 + (\psi_{,y})^2\} dV - \int_{A_2} \hat{g} \psi dA \qquad (19)$$

$\psi = \gamma_N \psi^N$ を(19)に代入し $\partial \chi^e / \partial \psi_M = 0$ とすると $Z_{MN} \psi^N = P_M$ ⋯(20) $Z_{MN} = \int_{V_e} \gamma_{M,i} \gamma_{N,i} dV$, $P_M = \int_{A_2} \hat{g} \gamma_M dA$

要素として図-1にあるような3節点3角形要素を用い,形状関数 $\gamma_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta$ を使うと(20)は

$$\frac{1}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ \text{Sym.} & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \end{Bmatrix} = \hat{g} \begin{Bmatrix} L/2 \\ 0 \\ L/2 \end{Bmatrix} \qquad (21)$$

$b_i = y_j - y_k$

$c_i = x_k - x_j$ etc

Δ : 3角形要素の面積

境界に接しない要素では(21)の右辺荷重項は0である。(21)の左辺の係数マトリックスが構造解析でいう剛性行列である。解析する領域を要素分割し全要素に対し(21)式を立て,重ね合わせを行い$\{\psi_i\}$について解けば,各節点のψが求まる。要素内のψは $\psi = \gamma_N \psi^N$ より求まる。以上により任意形状物体周辺の流線が簡単に求まる。一様流速10m/secの中に置かれた半径2mの円柱のまわりの流線を図-1に示す。

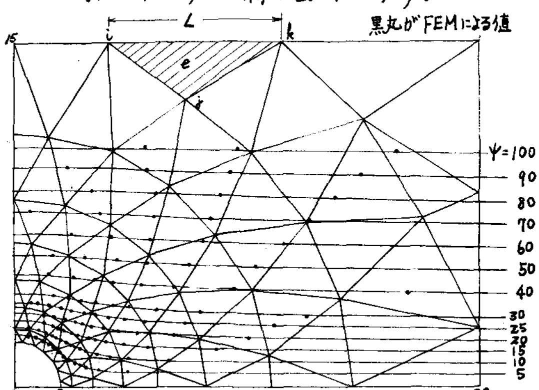

図-1 円柱まわりの流れの要素分割と流線

(2) 非圧縮性,定常粘性流体

この場合(11),(13)式は夫々次式となる

$$\rho r^m_{NPL} v^L_m v^P_i + h_{MNi} p^M + Z_{MN} v^M_i + W^{ij}_{MN} v^M_j = P_{Ni} \qquad (22)$$

$$r^m_{NPL} = \int_{V_e} \psi_N \psi_{P,m} \psi_L \, dV$$

$$h_{MRi} v^R_i = 0 \quad \cdots (23)$$

(22)は非線形方程式である。この解法は文献(2)にあるように密度ρの増分法により行う。

2次元問題では,あるρに対する解$\mathbf{v}$を次のように表わす。

$$\mathbf{v} = [\delta_1\ \delta_2 \cdots \delta_i \cdots \delta_N]^{-1}$$

$$\{\delta_i\} = [u_i\ v_i\ p_i]^{-1} \qquad (24)$$

ここでNは全節点数,u_i, v_i, p_iは節点iの夫々x, y方向の流速及び圧力である。

次に(22),(23)両式を次の一本の式にまとめて表わす。 $f(\mathbf{v}, \rho) = 0$ (25)

$\rho + \delta\rho$に対する解を $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$ とすれば $f(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}, \rho + \delta\rho) = 0$ (26)

(26)をテーラ展開し高次項を無視すると $f(\mathbf{v}, \rho) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \delta\mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \delta\rho = 0$ $\therefore \delta\mathbf{v} = -\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right]^{-1} \left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\right\} \delta\rho$

これを繰返し $n+1$ 回目の解は $\mathbf{v}^{(n+1)} = \mathbf{v}^{(n)} - \delta\mathbf{v}^{(n+1)} \times \delta\rho^{(n+1)}$ (27)

$$\left[\frac{\partial f^{(n)}}{\partial \mathbf{v}^{(n)}}\right]\left\{\delta\mathbf{v}^{(n+1)}\right\} = \left\{\frac{\partial f^{(n)}}{\partial \rho^{(n)}}\right\} \delta\rho^{(n)}, \quad \rho^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{n+1} \delta\rho_i \qquad (28)$$

初期値として$\rho = 0$に対する$\mathbf{v}^{(0)}$を考えると,このとき(22)は線形となり図-1の3節点3角形要素に対し次式となる。 具体的な数値計算例は当日会場で示す。

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{ik} \\ & K_{jj} & K_{jk} \\ \text{sym.} & & K_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} \qquad (29)$$

ここで $[K_{ij}] = \frac{t}{4\Delta} \begin{bmatrix} \mu(2 b_i b_j + c_i c_j) & \mu c_i b_j & -\frac{2}{3}\Delta b_i \\ \mu b_i c_j & \mu(b_i b_j + 2 c_i c_j) & -\frac{2}{3}\Delta c_i \\ -\frac{2}{3}\Delta b_j & -\frac{2}{3}\Delta c_j & 0 \end{bmatrix}$ $\{F_i\} = \begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ 0 \end{Bmatrix}$

t: 要素の厚さ

文献 1) O.C. Zienkiewicz, "Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, 1971, PP295~306

2). J.T. Oden and L.C. Wellford, "Analysis of Flow of Viscous Fluids by F.E.M.", AIAA J. Vol 10, No12, '72, PP1590~1599