

大阪大学工学部 正員 村岡浩爾  
大阪大学工学部 正員 O中上啓二

1. 予えがき : 感潮河川の水質汚濁の解析法として非定常拡散方程式の差分近似法が用いられ、近き有限要素法の導入が試みられる傾向にあるが、果してその近似解が元の物理則を満ちしているかどうか問題を残すところが多い。ことに感潮部の流れは複雑な非線形潮流であるため、変動する流速・拡散係数に対して差分間隔 $\Delta x$   $\Delta t$ を固定して計算する場合に差分近似誤差は避けられず、差分型式の選択から誤差の評価が非常に重要となろう。著者は先の研究<sup>1)</sup>において導入した伝達関数の概念を用いて、変動流場における差分近似の数値誤差評価を正弦振動流場、および一様流場のそれと対比しながら検討を加える。

2. 変動流場における増巾因子 : 対象とする物理現象が線形微分方程式系で表わされる場合に、Fourier変換を用いることにより波数成分の伝達関数で説明できることは先の報告に示した。すなわち、 $\bar{C}$ 、 $\bar{D}$ が時間的に変動する移流分散方程式

$$\partial C / \partial t + U(t) \cdot \partial C / \partial x = D(t) \cdot \partial^2 C / \partial x^2 \quad (1)$$

の波数成分の $N$ 個時間後の差分近似誤差 $\Delta_N$ は、差分方程式系の増巾因子を $\hat{Q}$ とした時、つぎのように表わされる。

$$\Delta_N = \left\{ 1.0 - \frac{\prod_{j=1}^N |\hat{Q}_j|}{e^{-\int_0^N U dt} \int_0^N D dt} \cdot \exp \left[ i \left\{ \sum_{j=1}^N \phi_j + \int_0^N U dt \right\} \right] \right\} \cdot \hat{Q}_{anal} \quad (2)$$

ここに、 $|\hat{Q}| = \sqrt{\text{Re}^2[\hat{Q}] + \text{Im}^2[\hat{Q}]}$ ; 増巾係数

$\phi = \arctan \{ \text{Im}[\hat{Q}] / \text{Re}[\hat{Q}] \}$ ; 位相ずれ

$\hat{Q}_{anal} = e^{-\int_0^N U dt} \int_0^N D dt \cdot \exp \left[ i \left\{ \sum_{j=1}^N \phi_j + \int_0^N U dt \right\} \right]$ ; 解析解の増巾因子

式(2)より、累積数値減衰 $Q_N = \prod_{j=1}^N |\hat{Q}_j| / e^{-\int_0^N U dt} \int_0^N D dt = 1.0$ 、および累積位相誤差 $\phi_N = \sum_{j=1}^N \phi_j + \int_0^N U dt = 0.0$ を同時に満足する場合にのみ誤差 $\Delta_N$ は $0.0$ であるが、時々刻々の変動する $\bar{C}$ 、 $\bar{D}$ に対しては特別な場合を除いて誤差を消滅することはできない。つまり、 $Q_N$ は増巾係数の積で表わされるのに対し、 $\phi_N$ は位相ずれの和で表わされることから、 $N$ に任意時刻の差分方程式系のもつ位相ずれ $\{\phi + \int_0^N U dt\}$ の正負の符号は強要条件 $|F| = \bar{D} \cdot \Delta t / \Delta x \leq 1.0$ を満足する範囲では $\bar{C}$ と同じであるため、位相誤差による数値的分散も $N$ に流速の変動にもよって変化する。たとえば、正弦振動のように流速変動の同期パターンが正負の領域で同形である場合には、累積位相誤差 $\phi_N$ も同期変動することになり、半同期後には最大、一周期後には消滅することとなる。したがって、一様流に対しては反発的である数値的分散は振動流においてはある有限の位相誤差で上限が押さえられ、数値的減衰が卓越することとなる。一方、感潮河川のような変動流場においては、累積位相誤差は同期毎に消滅しないでもし計算される傾向にあることから、 $Q_N$ 、 $\phi_N$ ともに小さい差分法を適用する必要がある。代表的な差分法として、つぎの種を考える。

$$[C_{i+1}^{n+1}]^{2nd} = C_i^n - \frac{F}{2} (C_{i+1}^n - C_{i-1}^n) + \left( 4 + \frac{F^2}{2} \right) (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \quad (3)$$

$$[C_{i+1}^{n+1}]^{3rd} = [C_{i+1}^{n+1}]^{2nd} + \left( \frac{F^2}{12} - \frac{F^3}{2} - \frac{F^4}{2} \right) (C_{i+2}^n - 2C_{i+1}^n + 2C_{i-1}^n - C_{i-2}^n) \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} \frac{dC_{i+1}}{dt} + \frac{2}{3} \frac{dC_i}{dt} + \frac{1}{6} \frac{dC_{i-1}}{dt} = - \frac{F}{2} (C_{i+1}^{n+1/2} - C_{i-1}^{n+1/2}) + 4 (C_{i+1}^{n+1/2} - 2C_i^{n+1/2} + C_{i-1}^{n+1/2}) \quad (5)$$

ここに、 $F = \bar{D} \cdot \Delta t / \Delta x$ 、 $G = \bar{D} \cdot \Delta t / (\Delta x)^2$

式(3)、(4)はそれぞれTaylor展開の2次、3次項まで考慮したexplicitな中心差分法である。式(5)は有限要素法による近似解法の中で基底関数を用いた関数とするGalerkin法により求められ<sup>2)</sup>圧迫各項の係数は、

Fourier変換した場合の低波数成分が $\Delta x \rightarrow 0$ となるように求めたweighted implicit法の結果と一致す

る。また、この係数を1.0とした時Crank-Nicolson法となる。

上記各差分法の差異を、正弦振動流の5周期( $N=420$ )後での増巾因子と最大位相誤差の関係で表わしたのが図-1である。 $\phi_n$ は半周期後に最大位相誤差となり、高次差分法の劣は二次差分法に比べて非常に小さく位相誤差なく適正に伝達される波数成分は増大する。すなわち、explicitな差分法では増巾係数 $Q_n$ が一種のfilter作用を及ぼし高波数成分は除去され、安定条件内で $Q_n$ は減衰あるいは増大する。しかし、この効果は位相誤差をももたらし高波数成分による解の振動を抑制する作用をなし物理的には否定し難い。地方、Galerkin法は全波数成分について $Q_n=1.0$ で正確に伝播するため位相誤差による分散を生じ、その値は小さく日単位の振数計算を精度高く行い得よう。

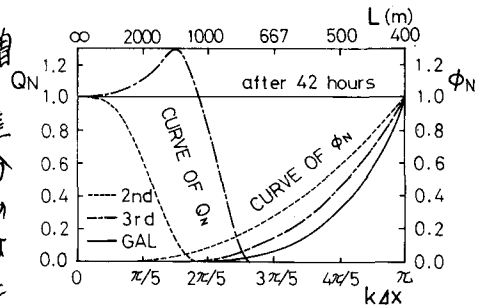


図-1 増巾因子と最大位相誤差の関係

### 3. 差分近似濃度計算例： 振数項を中心

差分することによる誤差は $\Delta t \leq 1/2$ 内では非常に小さく移流するだけで変形しない移流方程式を用いて、流速場または分布形状への影響を各差分法を用いて検討する。図-1から明らかなように、初期分布の選定は差分間隔 $\Delta x$ との関係において重要であり、適正に伝播される低波数成分の卓越するガウス分布 $B^*(\sigma=1.067^m)$ および $k\Delta x \leq \pi$ に一致する分布 $A^*(\sigma=5.33^m)$ を用いた。また誤差の指標として(1)減衰を示す最大濃度 $C_{max}$ 、(2)振動散散を表す負の濃度 $C_{min}$ 、および(3)歪度を選んだ。

|    | SCHEME | BACK   | 2nd-CENT | 3rd-CENT | C-N     | GALERKIN |
|----|--------|--------|----------|----------|---------|----------|
| A* | Cmax   | 0.3371 | 0.7922   | 1.0034   | 0.7794  | 0.9835   |
|    | Cmin   | 0.0000 | -0.2260  | -0.0411  | -0.3197 | -0.0019  |
| B* | Cmax   | 0.5823 | 0.9745   | 1.0019   | 0.9781  | 0.9954   |
|    | Cmin   | 0.0000 | -0.0194  | -0.0000  | -0.0304 | 0.0000   |

表-1 一様流濃度分布 24時間後  $F=0.2$

|    | SCHEME   | 2nd-CENT | 3rd-CENT | C-N     | GALERKIN |
|----|----------|----------|----------|---------|----------|
| A* | Cmax     | 0.8139   | 1.0689   | 0.8790  | 0.9794   |
|    | Cmin     | -0.0480  | -0.0030  | -0.2149 | -0.0178  |
|    | Skewness | 0.8336   | 0.0000   | 2.3020  | 0.0490   |
| B* | Cmax     | 0.9731   | 1.0069   | 0.9922  | 0.9989   |
|    | Cmin     | 0.0015   | -0.0000  | -0.0014 | -0.0000  |
|    | Skewness | 0.1042   | 0.0000   | 0.2878  | 0.0613   |

表-2 振動流濃度分布 42時間後  $U=0.5 \text{ cm/s}$

表-1の一様流計算( $F=0.2$ )では数値的減衰効果の大きい地方C差分ならびに二次差分では分布の減少分散が大きく適用できない。また三次差分、Galerkin法では24時間の演算においても、その誤差は1%程度であり、一様流場では位相誤差が卓越することがわかる。つぎに、モデル潮汐変動流を用いて濃度分布の時間変化を示したのが図-2である。ここに $\Delta t$ は $F_{max}=1.0$ となるように選んである。Implicitな差分法においては数値的減衰がなく分布形状の歪みは累積位相誤差に基づくものであり、流速変動の周期性が $C_{max}$ 、 $C_{min}$ の時間変化に表われている。特に、C-N法では20%程度の誤差を含んで分布形状は振動する。

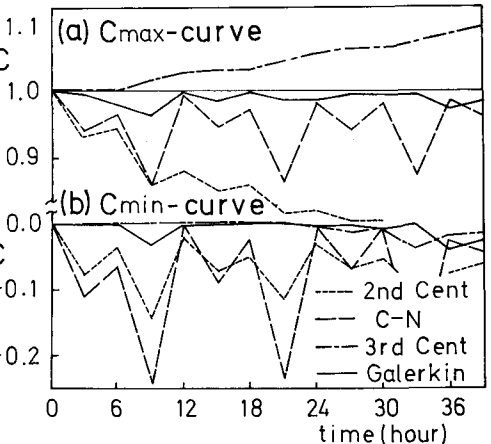


図-2 振動流濃度分布変化(A-分布)

explicitな差分法では高波数成分を遮断するので負の濃度発生、解の振動は小さいが、演算時間の増大とともに二次差分法では $C_{max}$ の減少が、三次差分法では増大がA\*分布では顕著である。これに対して、位相誤差の少ないImplicitな差分法であるGalerkin法では $C_{max}$ は3%程度の誤差の範囲で変動し、周期毎に加算される位相誤差の累積も非常に小さく、複雑な非線型性を帯びる実河川での汚濁予測に最も適している。流速が正弦振動の場合の5周期後の分布形状を比較したのが表2であり、同様の傾向がみられる。最後に本研究を進めるにあたり適切な助言を賜った本学の室田明、植本亨両教授に謝意を表す。

<参考文献> 1) 村岡、中江、土木学会論文報告集 73年5月 2) Pricex Targa, Soc. Pet. Eng. J. Sept. '68