II-91　DCL手法による貯水池群の最適操作

東京工業大学土木工学科　正会員　竹内邦良

1. まえがき

貯水池群の最適操作方法をDP，LPをはじめとする数学的プログラミングを用いて決定しようという試みは，すでに数多くなされ，最近の目新しいものとしては Heidari 等による DDDP の開発[1]，また R. Velle 等による Linear Dicision Rule[2] 等が挙げられる。さらにここで新しい手法DCLを開発したのは，これまでのものがいずれも一般性を有さない手法であるからであって，例えばDDDPは決定変数の数が多い場合には計算時間上の利点があらわれて来ないし，Linear Decision Rule では，放流量を貯水量プラス定数であらわすことの疑問の他にも，決定変数として貯水池よりの直接放流以外のものを用いることが出来ないなどの制約が課せられ，広く実用に供する段階からは遠いという事実にもとずいている。今回開発したDCL手法は，水資源の空間的配分にLPを用い，時間的配分にDPを用いることによって，決定変数を連続量のまゝ扱うことを可能にし，もって大規模な水資源システムの最適化を可能にするものである。

2. DCL手法

S_t を t 期の貯水量をあらわすベクトル，I_t を t 期の流入量ベクトル，また u_t を t 期の決定変数ベクトルとする。いま t 期の状態量が (S_t, I_t) であるとき，u_t なる決定を下した場合，t 期の損失が $L_t(u_t; S_t, I_t)$ であらわされるとし，さらに t+1 期頭において状態量が (S_{t+1}, I_{t+1}) であるとき，任意の大きい整数をNとして，t+1 期よりN期までの累加最小期待損失を $f_{t+1}(S_{t+1}, I_{t+1})$ で表わせば，t期よりN期までの累加最小期待損失は，各期の流入量から季節的周期性を取り除いたものが独立な事象であるとすると，

$$f_t(S_t, I_t) = \min_{u_t}\left[L_t(u_t; S_t, I_t) + \sum_{I_{t+1}} p_{t+1}(I_{t+1})\cdot f_{t+1}(S_{t+1}, I_{t+1}) \right] \qquad (1)$$

と表わされる。ここで $p_{t+1}(I_{t+1})$ は，t+1 期に流入量 I_{t+1} の実現する確率である。DCL手法は上のDPの各段階における最小値問題をLPを用いて解く手法である。したがって L_t ならびに f_{t+1} の期待関数；これを G_{t+1} とし，

$$G_{t+1}(S_{t+1}) = \theta\cdot \sum_{I_{t+1}} p_{t+1}(I_{t+1})\cdot f_{t+1}(S_{t+1}, I_{t+1}) \qquad (2)$$

たゞし θ は期毎の割引率のファクター，で定義される；を線型化する必要がある。直接損失関数 L_t は給水量の限界効用逓減の法則により convex と考えることが出来，さらに累加損失関数 G_{t+1} も，貯水量の限界効用逓減の法則により convex と考えることが出来る。したがって両関数を piece-wise linear な関数でおきかえれば，近似的にはかなりの精度が得られると共に，最小値問題は convex LP によって解けることゝなる。両関数に関する以上の性質を先見的条件として，L_t，G_{t+1} を次のように線型化する。

$$L_t(u_t) = c\cdot u_t \qquad (3)$$

$$G_{t+1}(S_{t+1}) = H_{t+1}\cdot S_{t+1} \qquad (4)$$

また t 期頭において状態変数が (S_t, I_t) であるという条件，ならびにその他の制約条件を，やはり線型の条件式として別に次のように表わす。

$$A\cdot\begin{bmatrix} u_t \\ S_{t+1} \end{bmatrix} \leq b_t \qquad (5)$$

ここでcはn次元の直接損失係数の行ベクトル，H_{t+1}はM次元で$t+1$期の累加損失係数の行ベクトル，u_tはn次元の決定変数列ベクトル，S_{t+1}はM次元の貯水量列ベクトル，Aは$m\times(n+M)$の制約条件の係数マトリックス，またb_tはm次元の制約条件の定数列ベクトルである。以上の線型化はpiece-wise linearになっているから，各変数はpiece毎に部分変数が用いられている点を，説明は省略するが注意されたい。

線型化されたDP(1)式は，

$$\left.\begin{aligned} f_t(S_t, I_t) &= \min_{u_t}\left[\, c\cdot u_t + H_{t+1}\cdot S_{t+1} \right] \\ &\text{subject to} \quad A\cdot\begin{bmatrix} u_t \\ S_{t+1}\end{bmatrix} \le b_t \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

となる。ただし$t+1$期頭の状態変数S_{t+1}が決定変数の形で入っているが，S_{t+1}はu_t，S_t，I_tによって定まるものであり，その遷移方程式は制約条件の中に含められているので，計算上$\begin{bmatrix} u_t \\ S_{t+1}\end{bmatrix}$を決定変数として扱っても，実質的には$u_t$だけが決定変数であることにかわりはない。

このようにDCL手法は，(1)，(2)の一般的DPと，(6)，(2)の組み合わせに変換することによって，決定変数を離散化する必要性を回避したというのが形式上の特徴である。次に計算手順であるが，$N+1$期の累加損失関数G_{N+1}がゼロであるという境界条件を仮定して後進型の計算を行う。$f_N(S_N, I_N)$が求まれば(2)式よりG_Nが求められ，そのG_Nに対してpiece-wise linearな曲面を当てはめ(4)式を導く。この際係数ベクトルH_Nの推定には最小自乗法を用いる。線型近似されたG_Nを用いて$N-1$期の計算を同様に行うことが出来，ひきつづき$N-2$，$N-3$，…，tの計算を繰り返す。繰り返し計算は累加損失係数H_tが一年の周期をもって収斂したとき終了する。

3．DCL手法の適用可能性と利点

DCLでは離散化された状態変数（S_t，I_t）の数多くの組み合わせに対してLPを解かねばならないが，組み合わせが変化した場合でもLPのベースの変化として表われるものは少ないという事実にもとずいて，双対シンプレックス法を応用すると極めて高速度で解くことが出来，この点では心配がいらない。

本手法の利点をまとめて述べれば次のようである。(a)累加損失係数H_{t+1}さえわかっていれば，t期の最適操作u_tは(6)のLPを解くことによって得られる。したがって最適操作ルールはH_tの形で極めてコンパクトに記憶出来る。(b)決定変数を離散化する必要がなく，DPのdimensionalityの難点が一部解消されている。(c)求められたH_{t+1}を用いて最適操作u_tを計算する為には観測された状態量（S_t，I_t）を離散化する必要がなく，その段階では誤差が介入しない。

4．むすび

ここではDCL手法のごく基本的な思想を報告するにとゞめたが，本手法の実用化の為にはさらにいくつかの理論展開ならびに近似が必要であって，その詳細は土木学会論文報告集を通じて発表する予定である。

5．参考文献

1. M. Heidari et al, "Discrete Differential Dynamic Programming Approach To Water Resources Systems Operation", Water Resour. Res. 7(2), April 1971.
2. C. ReVelle et al, "The Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design. 1., 2. and 3." Water Resour. Res. 5(4), 6(4) and 9(1).