# II-75　流域水の挙動に関する変分原理の物理的意義

名古屋大学工学部　正員　髙木不折

## 1. まえがき

筆者は数年前に流域水の挙動に関する変分形式を提案した。また力学系の概念を明白にすることによって，その手法が河水と地下水ならびにそれらの干渉をも含めた流域水の挙動についての洞察を深め，さらにいろいろな問題の解決に応用されることを示した。その基礎は，局所平衡の仮定と local potential の概念であるが，本報では local potential すなわちこの変分原理の物理的意義を考えることによって，流域水の挙動が物理的にはどのように解釈されるかを明らかにする。

## 2. local potential と変分形式

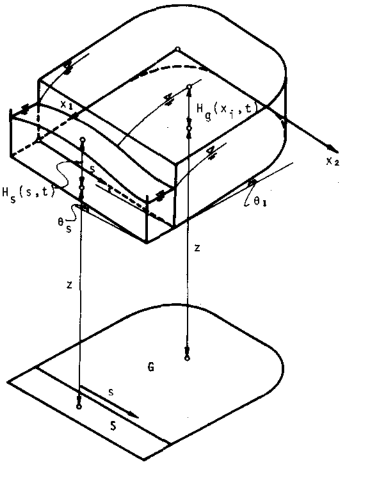


Fig. 1　kinematical system for the basinwide water behaviors

いま，右図のような河水と地下水の運動の場（GとS）から成る力学系を考えると，河水・地下水の挙動はそれら両者の干渉をも含めて，変分形式

$$\delta\left\{\int_G \mathcal{L}_g\, dx_i + \int_S \mathcal{L}_s\, ds\right\} = 0 \qquad (1)$$

にまとめられる。ここで $\int_G dx_i = \int_G dx_1 dx_2$ の面積積分である。上式中の $\mathcal{L}_g$, $\mathcal{L}_s$ は local potential と呼ばれ

$$\mathcal{L}_g = \gamma\frac{\partial H_g^*}{\partial t}(H_g+z) + \frac{1}{2}\sum k H_g^*\left(\frac{\partial(H_g+z)}{\partial x_i}\right)^2 - r(H_g+z) \qquad (2)$$

$$\mathcal{L}_s = B_s\frac{\partial H_s^*}{\partial t}(H_s+z+\varepsilon) + \frac{2}{3}\frac{B}{n}H_s^{*5/3}\left(-\frac{\partial(H_s+z+\varepsilon)}{\partial s}\right)^{3/2} \qquad \text{(註1)}\ (3)$$

である。$H_g$, $H_s$ は地下水と河水の水深で，それぞれ＊印を付けた「現実に起こる水深とその周辺の仮想変位から成っている。$\gamma$：有効間隙率，$k$：透水係数，$B_s$：河川幅，$n$：粗度係数，$r$ は地下水帯単位面積あたりの水供給強度である。なお(1)式は $H_g$, $H_s$ のみについての変分を考え，その後補助条件式

$$H_g(x_i, t) \equiv H_g^*(x_i, t), \qquad H_s(s, t) \equiv H_s^*(s, t) \qquad (4)$$

を用いると，Euler-Lagrange の条件式，ならびに河川と地下水帯の境界での自然境界条件として，それぞれ

$$\gamma\frac{\partial H_g^*}{\partial t} - \sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{k H_g^*\frac{\partial(H_g^*+z)}{\partial x_i}\right\} - r = 0 \qquad (5)$$

$$B_s\frac{\partial H_s^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{B_s}{n}H_s^{*5/3}\left(-\frac{\partial(H_s^*+z+\varepsilon)}{\partial s}\right)^{1/2}\right] + \left(kH_g^*\frac{\partial H_g^*}{\partial x_1} - f_1 H_g^*\right)\frac{dx_2}{ds} - \left(kH_g^*\frac{\partial H_g^*}{\partial x_2} - f_2 H_g^*\right)\frac{dx_1}{ds} = 0 \qquad (6)$$

がえられる。これらが，地下水，河川水の基礎方程式であることは云うまでもない。

## 3. local potential とエネルギー損失

河川におけるエネルギー損失（単位長あたり $\Delta E_s$）は，ここで扱っている一次元流れでは，地下水帯より河川への横流入量を河川単位長あたり $q$ とすれば，近似的に

$$-\Delta E_s \cong B_s\frac{\partial H_s^*}{\partial t}(H_s^*+z+\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial s}\left\{(H_s^*+z+\varepsilon)Q_s\right\} - q\left\{H_s^*+z+\varepsilon\right\} \qquad (7)$$

となる。$Q_s$ は河川の流量である。また，地下水帯単位面積あたりのエネルギー損失 $\Delta E_g$ は

---

註1；以前の表現では，速度水頭 $\varepsilon$ が入っていない。

$$-\Delta E_g \fallingdotseq \gamma \frac{\partial H_g^*}{\partial t}(H_g^* + z) - \frac{\partial}{\partial x}\left\{ k H_g^*(H_g^* + z) \frac{\partial(H_g^* + z)}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{ k H_g^*(H_g^* + z) \frac{\partial(H_g^* + z)}{\partial y} \right\} - r(H_g^* + z) \tag{8}$$

である。

local potential (2)(3)式において、$H_g \equiv H_g^*$, $H_s \equiv H_s^*$ とした場合、すなわち現実の現象における $\mathcal{L}_g$, $\mathcal{L}_s$ の値を $\mathcal{L}_g^*$, $\mathcal{L}_s^*$ とする。このような場合には、(5)(6)式が成立しているから、(2)(3)(5)(6)の4式より

$$\mathcal{L}_g^* = -\frac{1}{2}\Delta E_g + \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{ k H_g^*(H_g^* + z) \frac{\partial(H_g^* + z)}{\partial x_i} \right\} \tag{9}$$

$$\mathcal{L}_s^* = -\frac{1}{3}\Delta E_s - \frac{\partial}{\partial s}\left[ \frac{B_s}{n} \cdot H_s^{*5/3} \left( -\frac{\partial(H_s^* + z + \varepsilon)}{\partial s} \right)^{1/2} \cdot (H_s^* + z + \varepsilon) \right] + q(H_s^* + z + \varepsilon) \tag{10}$$

となる。

(9)(10)式の右辺第1項は、それぞれ係数はかゝっているが、地下水帯単位面積、河川単位長あたりのエネルギー損失であるのに対し、第2項はそれぞれの領域周辺よりの流れの flux によって、領域内に持ち込まれるエネルギーを意味している。このように local potential $\mathcal{L}_g^*$, $\mathcal{L}_s^*$ はともにエネルギーと密接な関係にあることがわかる。ただ、$\Delta E_g$, $\Delta E_s$の係数は互に異なっている。これは前者すなわち地下水流がエネルギー勾配に比例した動きをするのに対して、後者の河川水の流れはその 1/2 乗に比例すること、云いかえれば両者の流れの構造の差異によるのである。

## 4. 変分原理と流域水の挙動

$\mathcal{L}_g^*$, $\mathcal{L}_s^*$ を(1)式に用いた場合の汎関数 J の値を $J_g^*$, $J_s^*$ すなわ

$$J^* = J_g^* + J_s^*$$

$$J_g^* = \int \mathcal{L}_g^* \, dx_i \, , \qquad J_s^* = \int \mathcal{L}_s^* \, ds$$

とすれば、前項での議論で明らかなように、J の定留値 $J^*$ は、力学系全体の内部で起こっているエネルギー損失（地下水と河水とでは重みを別にしているが）とこの系の外部より流れによって系内に単位時間あたりに持ち込まれるエネルギーとの和に対応している。そのようすは Fig. 2 に記したとおりである。

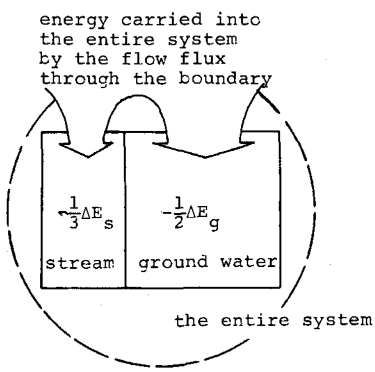


Fig. 2

$\mathcal{L}_g$, $\mathcal{L}_s$ には同じ水深を表わす量として $H_g$ と $H_g^*$, $H_s$ と $H_s^*$ とが含まれているが、$H_g^*$・$H_s^*$ が流れの幾何学的状態すなわち水深、通水断面といった量を表わしているのに対して、$H_g$・$H_s$という量は流れの力学的状態（エネルギー、流れの駆動力）を示している。したがって、この変分原理は、流れの幾何学的状態を局所的に固定するという条件のもとで、流れの力学的状態を仮想変位させた場合の定留性を問題としていることになる。

以上で明らかなように、力学系全体（地下水・河水を合わせた系）としての流域水の挙動は、系内でのエネルギー損失と系内に流れによって持ち込まれるエネルギーの和の定留性にしたがって挙動しているのである。ただそれぞれの流域成分水の役割はその流れの機構如何によって異なっていることは注目すべきであろう。

## 5. あとがき

この方法を用いると、種々の問題の近似解を比較的容易に求めることができるほか、流域水のもつ力学的性質と統計的性質を結びつけることもできるものと考えている。具体例については現在検討している。