II-58　流量シミュレーションモデルについて

北海道大学　正員　星　清

1. まえがき　流量時系列の構造が1次マルコフ過程をなすと考えられるとき，流量時系列を模擬発生させる方法として lag-one と lag-zero の相関係数行列を入力とするモデル式を提案し，従来から用いられている Matalas の方法による多地点マルコフ連鎖モデルとの比較検討を行なう。適用例として石狩川上流部の4地点の流量観測所((1) 中愛別，(2) 伊納，(3) 多度志，(4) 橋本；番号は観測所番号) を用いた。なお，既往標本数は 19 年間 (1952 - 1970) の同時記録の月流量である。また，正規変換には Log Pearson Type III を用いた。

2. 基本式　以後扱われる変量はすべて標準化されているものとする。採用モデルは Fig. 1 に図式化される。

Fig. 1　Scheme of the Model

$$Z_{k-1} \longrightarrow a_i \longrightarrow g_i = w_i Z_k \longleftarrow Z_k$$

$$[n\times N] \quad [1\times n] \quad [1\times N] \quad [1\times n] \quad [n\times N]$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

(n, 観測所数； N,月標本数)　すなわち，今月の流量 (Z_k) の情報を線型変換して合成変量 (g_i) に収約し，この合成変量と先月の流量 (Z_{k-1}) の相関係数 (構造ベクトル, a_i) ができるだけ高い値を示すように重みベクトル (w_i) を決定する。重みベクトルを算出するための条件式は次の通りである。

$$w_i R w_i^T = 1 \quad (1) \qquad w_i R w_j^T = 0 \quad (i \neq j) \quad (2)$$

$$V_i = a_i a_i^T \quad (3)$$

ここで，

$$a_i = w_i R_1 \quad (4) \qquad R = Z_k Z_k^T / N \quad (5)$$

$$R_1 = Z_k Z_{k-1}^T / N \quad (6)$$

(1) 式は合成変量毎の分散が1であるための条件式，(2) 式は 2 組の合成変量が直交するための条件式である。(1), (2) 式の条件のもとで (3) 式が最大になるように重みベクトルを求めると，すべての合成変量について次式が成立する。[1]

$$(R_1^T R^{-1} R_1 - \lambda_i I) a_i^T = 0 \quad (7)$$

$$w_i = a_i R_1^T R^{-1} / \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (8)$$

ここで，R^{-1}, R の逆行列； I ，単位行列； 0，零ベクトル．　すなわち，λ_i と a_i はそれぞれ対称行列 $R_1^T R^{-1} R_1$ の固有値，固有値ベクトルになり，固有値ベクトルは直交するから次式が成立する。

$$a_i a_j^T = \begin{cases} \lambda_i & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \quad (9)$$

(7)，(8) 式から n 組の重みベクトル(W) が月標本数から算出されると，任意の長さの観測所間の月流量を同時に模擬発生させるモデル式は次式で与えられる。

$$Z_k = W^{-1} G \quad (10)$$

ここで，G は n組の標準正規乱数列である。なお，(10) 式の重み係数行列は (1),(2) 式から行ベクトルは互いに直交しているので，W の逆行列は存在する。

Matalas[2] は水文量の模擬発生方法として次のような多地点マルコフ連鎖モデルを提案した。

$$Z_k = A\, Z_{k-1} + B\, E_k \quad (11)$$

$$[n\times N] \quad [n\times n] \quad [n\times n][n\times N]$$

係数行列 A, B は次式で与えられる。

$$A = [Z_k Z_{k-1}^T/N]\,[Z_{k-1} Z_{k-1}^T/N]^{-1} \quad (12)$$

$$B B^T = [Z_k Z_k^T/N] - A\,[Z_{k-1} Z_k^T/N] \quad (13)$$

行列Bの要素は (13) 式の右辺 (対称行列) の規準化された固有値ベクトルによって与えられる。
(11) 式において Z_{k-1} の初期値と E_k に n 組の標準正規乱数を順次発生してやれば，多地点の水文量時系列を recursive に求めることができる。

3. 解析例と考察　(10)式 (Model I) と (11) 式 (Model II) によって月流量を50年間模擬発生させた結果を示す。実際の解析では，冬期間においてデータが完全でないので，4 月から

12月までの模擬発生を行なった。このため，(11)式の初期値としての3月の流量を前年度(3)のモデルによって単独に模擬発生させた。また，4地点において発生された流量系列は連続条件（$Q_2 > Q_1$, $Q_4 > Q_2+Q_3$）を満足したものである。Table 1とTable 2に実測値とシミュレート値を比較して掲げた。ひずみ度については実測値とシミュレート値に差がみられるが，これは実測値の月標本数が少なかつたためと考えられる。2つのモデルによる模擬発生の結果には有意な差はみられず，水文量の模擬発生の手段としては両モデルとも有効であることが確められた。しかしながら，両モデルの構造上の差異を考察してみる。(11)式は従来から利用されている回帰線モデルであり，パラメーターの評価基準は最小自乗法の原理に基づいており，係数行列Bがいわゆる標準誤差に相当している。このため，従来から指摘されているように，得られたパラメーター（A，B）は水文量の地域分布特性の相異を説明するのになんらの情報を提供しない。一方，(10)式では，Fig. 1に示されるように，合成変量g_iはまえもつて与えられる観測値ではないので重みベクトルの評価基準には最小自乗法とは違った手法が要求される。すなわち，今月の流量の先月の流量への依存の度合は流域毎に異なるという前提に立って，n組の合成変量が互いに直交するように重みベクトルの選定を行なっている。この結果，得られた構造ベクトルと重みベクトルも直交性を保存し，しかも固有値は全変動に対する各合成変量の変動の寄与の度合を与えるので，(10)式の模擬発生モデルでは，重みベクトルの独立な効果と各成分の変動を把握することができる。Table 3はその1例を示したものである。とくに(10)式は水資源システムが広域になればなる程，流量の地域分布特性の相異を客観的に説明するのに有効であり，解析と同時にモデル式の逆変換によって，多地点における任意の長さの流量時系列を模擬発生させることができる特徴を持っている。(10)式は(11)式の回帰線モデルの欠点を改善することが可能である。

Table 1 Statistics of the Observed and Simulated Monthly Streamflow

Month \ Station		HASHIMOTO m	σ	γ
Apr.	obs.	18259.4	4346.4	0.221
	I	19138.2	6360.1	1.490
	II	17907.5	3815.9	0.335
Jun.	obs.	6199.5	1515.5	-0.358
	I	7074.7	1783.6	0.718
	II	6565.8	1288.4	0.461
Aug.	obs.	8689.2	4929.6	0.574
	I	8625.9	4326.7	1.180
	II	9089.4	4292.7	0.629
Oct.	obs.	5612.1	2448.3	1.890
	I	5563.9	2425.4	1.900
	II	5304.5	1870.2	1.160
Dec.	obs.	4204.3	1190.7	1.100
	I	4392.9	1078.1	0.798
	II	4489.0	1172.2	0.704

m ; Mean [m^3/sec], σ ; Standard Deviation [m^3/sec], γ ; Skewness, obs. ; Observed Data, I ; Model I, II ; Model II

Table 2

Correlation Coefficients of Monthly Streamflow

Month \ Corre. Co.		r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{23}	r_{24}	r_{34}
Apr.	obs.	.313	.088	.157	-.176	.322	.404
	I	.386	.007	.305	-.143	.534	.266
	II	.610	.090	.459	-.268	.436	.436
Jun.	obs.	.860	.329	.481	.366	.634	.480
	I	.846	.333	.632	.313	.800	.294
	II	.711	.506	.532	.395	.793	.541
Aug.	obs.	.898	.662	.691	.784	.829	.827
	I	.878	.628	.871	.752	.909	.831
	II	.907	.704	.817	.786	.925	.827
Oct.	obs.	.836	.602	.870	.573	.844	.626
	I	.692	.567	.686	.776	.948	.772
	II	.735	.416	.668	.639	.892	.722
Dec.	obs.	.263	-.079	-.499	.254	.181	.221
	I	.259	-.384	-.490	.103	.190	.543
	II	.141	-.363	-.274	.251	.413	.384

r_{ij} ; Correlation Coefficient between Flows at Stations i and j

Table 3
Structure Vectors and Contributions of Four Composite Variates (May)

Sta. \ Stru. Vec.	a_1	a_2	a_3	a_4
1	-.384	-.261	-.077	.068
2	-.140	.518	.183	.035
3	.293	-.334	.302	.014
4	.681	.103	-.136	.039
λ_i	.716	.459	.149	.008
$100\lambda_i/\alpha$	53.75	34.45	11.18	0.60

$$\alpha = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1.332$$

おわりに，御指導下さった山岡 勲教授に感謝いたします。なお，本計算は北海道大学計算センター内 FACOM 230 - 60 上で行なった。

参考文献

(1) K.Hoshi& I.Yamaoka ; A Simulation Technique of Runoff at Multistations, Bulletin of Faculty of Eng., Hokkaido Uni., No 69, 1973. (2) N.C. Matalas ; Mathematical Assessment of Synthetic Hydrology, Water Resources Research, Vol. 3,No. 4, 1967.
(3) 星，風間；降水量の流域特性とシミュレーションについて，第27回土木学会年次講演会概要集，II，昭和47.