

1. 概説

たとえば1日間といったある期間内の豪雨を、12時間、6時間、3時間……といった短時間に配分していった場合、もとの日雨量分布がどのような確率分布に移行するかは、短時間雨量が基本量となる中小河川計画において重要な問題である。さて、以下では、短時間雨量がガンマ分布に従い、かつその和もガンマ分布で近似するという立場から解析を進めている。なお、日単位以上の水文量に対して同様な考えを適用した方法がすでに室田江藤らによって提案されているが、ここでは、筆者らが研究してきた二変数ガンマ分布の理論を応用して、できるだけ理論的に厳密に問題を取扱ひ、日単位以下への降雨配分への適用を試みてみた。

2. 理論的考察

1) 短時間配分のための確率分布のモデル化

(i) ガンマ型変量の和分布

a. 厳密解 共通の形状母数 ν 、尺度母数 σ をもつガンマ型変量 z_1, z_2 の和 z の密度分布は次式で与えられる。ただし、 ρ :相関母数、 $\Gamma(\nu)$ 、 $I_\nu(z)$:それぞれ引数 ν のガンマ関数、 ν 次の変形ベッセル関数

$$f_\nu(z) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu)\sigma^{\nu+\frac{1}{2}}(1-\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{\nu-1}{2}}} \left(\frac{z}{\sigma}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{z}{\sigma(1-\rho)}\right\} \cdot I_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sigma(1-\rho)}z\right) \quad \dots (1)$$

その累積分布 $F_\nu(z)$ は、一般的表現は難しいが、 ν が自然数および半奇数については次式のように表わせる。

a-1 ν が自然数のとき ($\nu = n = 1, 2, \dots$) ただし $\gamma(\nu, x)$: オイラー不完全ガンマ関数。

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[a_k \cdot \gamma\left(n-k, \frac{z}{\sigma(1+\sqrt{\rho})}\right) + a_{n-k} \cdot \gamma\left(n-k, \frac{z}{\sigma(1-\sqrt{\rho})}\right) \right], \quad a_{n+k} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!(n-1-k)!} \frac{(1-\rho)^k (1+\sqrt{\rho})^{n-k}}{(2\sqrt{\rho})^{n+k}} \quad \dots (2)$$

a-2 ν が半奇数のとき ($\nu = n + \frac{1}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$)

$$F_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \gamma\left(2n+2k+1, \frac{z}{\sigma(1-\rho)}\right), \quad a_k = \frac{n!(1-\rho)^{n+\frac{1}{2}}\rho^k}{(2n)!k!(n+k)!2^{2k}} \quad (3)$$

また、とくに相関母数が $\rho \rightarrow 0, 1$ に対して $F_\nu(z)$ は一般に以下のようなになる。

$$F_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(2\nu)} \cdot \gamma(2\nu, \frac{z}{\sigma}) \quad (\rho \rightarrow 0), \quad F_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \gamma(\nu, \frac{z}{2\sigma}) \quad (\rho \rightarrow 1) \quad (4)$$

b. 近似解 累積分布の近似解を与えるために、和分布の特性関数を媒介として平均値、分散などの特性値を求める。まず、特性関数 $Q(\theta)$ は、(1)式より次式で求められる。

$$Q(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta z} f_\nu(z) dz = (1-\rho)^\nu \left[\{1 - i\theta\sigma(1-\rho)\}^2 - \rho \right]^{-\nu} \quad (5)$$

これより、和 $z = z_1 + z_2$ の平均値、分散および偏み係数はつぎのように導かれる。

$$m_1 = 2\nu\sigma, \quad \sigma_2^2 = 2\nu\sigma^2(1+\rho), \quad (C_s)_2 = 2\{4-3(1-\rho)\} / \{(2\nu)^{\frac{1}{2}}(1+\rho)^{\frac{3}{2}}\} \quad (6)$$

これらの結果を利用して、(2)、(3)式などの累積分布の近似解を、 $f_\nu(z)$ もガンマ分布で近似しようとして誘導しよう。まず、和分布の尺度母数を、(4)式を考慮して、次式の無限級数で近似的に表わせるものとする。

$$\sigma_2' = \sigma(1 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots), \quad \sum a_i = 1 \quad (\text{ダッシュ: 近似値を示す添字}) \quad (7)$$

さて、平均値が厳密解と近似解で一致するという条件から、(6)式を用いて、形状母数はつぎのようなになる。

$$\nu_2'\sigma_2' = \nu_2'\sigma(1 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots) = 2\nu\sigma \quad \therefore \nu_2' = 2\nu / (1 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots) \quad (8)$$

つぎに、分散が一致するという条件から、

$$\nu_2'(\sigma_2')^2 = 2\nu\sigma^2(1 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots) = 2\nu\sigma^2(1+\rho), \quad \therefore a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = 0 \quad (9)$$

結局、和の累積分布の近似式として次式がえられたことになる。

$$F(z)' = \frac{1}{F(\nu_2')} \cdot \gamma(\nu_2', \frac{z}{\sigma_2'}) , \quad \text{ただし } \nu_2' = 2\nu/(1+\rho), \quad \sigma_2' = \sigma/(1+\rho) \quad (10)$$

この近似解を用いた場合には当然3以上の積率を用いる統計量に誤差を生ずる。これをひずみ係数の近似度として表わしておく。すなわち、ひずみ係数 $(C_s)_2$ の近似度 $\alpha(C_s)_2$ は、(6)、(10)式より次式で与えられる。

$$\alpha(C_s)_2 = \frac{(C_s)_2'}{(C_s)_2} = \frac{2/\sqrt{\nu_2'}}{2\{4-3(1-\rho)\}/\{(2\nu)^{1/2}(1+\rho)^{3/2}\}} = \frac{(1+\rho)^2}{1+3\rho} \quad (11)$$

$\alpha(C_s)_2$ は ρ のみに依存し、その関係は、図-1に示すとおりである。すなわち、もっとも近似度が低い場合でも、 $\alpha(C_s)_2 = 0.889$ ($\rho = 0.33$) で、一般に近似度が高く、また、 ρ が0あるいは1に近づくにつれて厳密解に漸近する。

C. 近似解の検証

(10)式の近似解と(2)、(3)式の厳密解を具体的に對比させて実用性を検証する。

計算は、 $\sigma = 1$ とし、 $\nu = 1/2, 1, 2$ および $\rho = 0.1(0.1)0.9$ について行なった。例として、 $\nu = 2$ で、かつ図-1でもっともひずみ係数の近似度が低くなる $\rho = 0.3$ について示す。このように各場合について、近似解は厳密解によく合致し、しかも防災計画上で問題となる z の大きい値に対して非常に近似度が高いことが分った。

(ii) ガンマ型多変数の和分布

前述の考えを多変数に拡張するには、 $Z_1 = \xi_1 + \xi_2$ と $Z_2 = \xi_3 + \xi_4$ の和、さらに、 $Z_1 + Z_2 = \xi_1 + \dots + \xi_4$ と $Z_3 + Z_4 = \xi_5 + \dots + \xi_8, \dots$ というように考えていけばよい。

前と同様に2つの変数の和が形状母数 ν_{2n} 、尺度母数 σ_{2n}' のガンマ分布で近似でき、その相関母数を ρ_{2n} と記すことにすると、 ν_{2n} 、 σ_{2n}' はそれぞれ次式で与えられる。

$$\nu_{2n}' = 2^n \nu / \{(1+\rho_1)(1+\rho_2) \dots (1+\rho_{2^{n-1}})\}, \quad \sigma_{2n}' = \sigma / (1+\rho_1)(1+\rho_2) \dots (1+\rho_{2^{n-1}}) \quad (12)$$

また、この分布のひずみ係数は次式で与えられる。

$$(C_s)_{2n}' = 2/\sqrt{\nu_{2n}'} = 2/\left\{\prod_{i=1}^n \{(1+\rho_{2^{i-1}})/2\}\right\}^{1/2} \quad (13)$$

結局、豪雨を短時間に配分した場合の分布関数の変形は、上式を逆に使って考えていけばよく、それには相関母数 $\{\rho_i\}$ の相互関係、すなわちもとの降雨量時系列 $\{\xi_i\}$ の自己相関性を明らかにする必要がある。

2) 自己相関性のモデル化

これにはもちろん実際の豪雨時系列の解析が基礎になることはいうまでもないが、ここではまず理論的なモデル化を行なった後に資料で検討することにした。雨量時系列 $\{\xi_i\}$ を、平均値 $m = E(\xi_i) = \nu\sigma$ 、分散 $d^2 = E[(\xi_i - E(\xi_i))^2]$ の定常時系列と考える。また、相関母数 ρ の推定値を次式の積率解によって表わすことにする。

$$\rho = E[(\xi_i - m)(\xi_{i+1} - m)]/d^2 = \{E(\xi_i \xi_{i+1}) - m^2\}/d^2 \quad (14)$$

(i) 厳密解

まず、 ξ_i と ξ_{i+1} の間に次式の線型一次の自己回帰モデルを仮定する。ただし $E(\epsilon_i) = 0$ である。

$$(\xi_{i+1} - m)/d = \rho_i (\xi_i - m)/d + \epsilon_i \quad (15)$$

つぎに、 ξ_i と ξ_{i+2} の間の相関係数を $\rho(2)$ と記すと、これは若干の計算によって、次式で表現できる。

$$\rho(2) = (\rho_i)^2 + E\epsilon_i, \quad E\epsilon_i = E(\epsilon_{i+1} \xi_i)/d \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

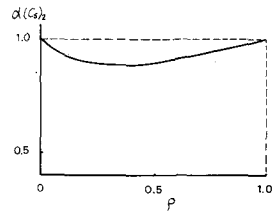


図-1 ひずみ係数の近似度と相関母数の関係

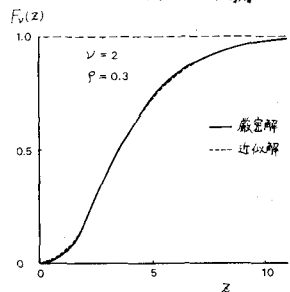


図-2 累積分布の厳密解と近似解との比較

上式中の E_r は、変量 ξ_i と、 ξ_{i+1} より ξ_{i+2} を推定するのに回帰曲線を使った際の誤差項 ϵ_{i+1} との相関に依存するものである。 E_r は、 ξ_i が正規分布に従えば当然 0 となるが、この場合にはそうはならず、一般的には以下のようにして計算できるはずである。

$$E_r = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\epsilon_{i+1} \xi_i) / d \cdot f(\xi_i, \xi_{i+1}, \xi_{i+2}) d\xi_i d\xi_{i+1} d\xi_{i+2} \quad (17)$$

さて、 $\epsilon_{i+1} \xi_i / d$ は $\xi_i, \xi_{i+1}, \xi_{i+2}$ の関数、また $f(\xi_i, \xi_{i+1}, \xi_{i+2})$ は、一次の自己回帰モデルを仮定しているから、 ξ_i の生起下の ξ_{i+1} の条件付分布を $f(\xi_{i+1} | \xi_i)$ のように記すと、次式のように書き直せる。

$$f(\xi_i, \xi_{i+1}, \xi_{i+2}) = f(\xi_i) \cdot f(\xi_{i+1} | \xi_i) \cdot f(\xi_{i+2} | \xi_{i+1}, \xi_i) = f(\xi_i) \cdot f(\xi_{i+1} | \xi_i) \cdot f(\xi_{i+2} | \xi_{i+1}) \quad (18)$$

上式右辺の具体的な表記は省略するが、結局 (15), (18) 式を (17) 式に用いることによって、 E_r の評価が可能になるはずである。しかし、これは非常に複雑な関数型を含み、現在のところ簡単な表現は難しいようである。

(ii) 近似解

また、 E_r は若干の変形によって、 $E_r = -E(\epsilon_i \epsilon_{i+1}) / \rho_i$ となり、 $\epsilon_i, \epsilon_{i+1}$ は規準化変量（平均値 0、分散 1）によって、 ξ_i から ξ_{i+1} 、および、 ξ_{i+1} から ξ_{i+2} を回帰特性を利用して推定する場合の誤差項である。そこで、通常 $|E(\epsilon_i \epsilon_{i+1})| \ll \rho_i$ したがって $E_r \ll (\rho_i)^2$ 、よって $\rho(2) \approx (\rho_i)^2$ 、さらに一般的には次式

$$\rho(k) = E[(\xi_i - m)(\xi_{i+k} - m)] / d^2 = (\rho_i)^k \quad (19)$$

の近似が予想されるので、以後この仮定の下に考察を行なっていく。上式と (6) 式より次式が成立し、その関係を図-3 に示す。

$$\rho_2 = \frac{\nu_1 \sigma_i^2 \{ \rho(3) + 2\rho(2) + \rho(1) \}}{2\nu_1 \sigma_i^2 (1 + \rho_i)} = \frac{\rho_i (1 + \rho_i)}{2}, \quad \text{一般に } \rho_2^i = \frac{\rho_2^{i-1} (1 + \rho_2^{i-1})}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (20)$$

以上によって、ある期間の降雨量分布が分れば、それを任意の短時間に配分した場合にどのような分布型に移行するかが容易に求められる。すなわち、 $2^n = m$ と記すと、任意の m に対して、(20) 式あるいは図-3 より内挿して、 ρ_m から ρ_i が分り、さらに (12) 式より

$$\nu_i / \nu_m = \sigma_m / (m \sigma_i) = \rho_m / \rho_i \quad (21)$$

を使って、 m 分割期間における降雨分布の形状母数 ν_i 、尺度母数 σ_i が求まる。さらに、必ずみ係数 $(C_s)_i$ は、次式で計算できる。

$$(C_s)_i = 2 / \sqrt{\nu_i} = 2 \sqrt{\rho_i / (C \rho_m \nu_m)} \quad (22)$$

3. 資料による理論の検討

以上、降雨の短時間配分による分布形状の変化を支配する特性は系列 $\{\rho_i\}$ であることが分ったので、この面から愛知県内の各年の極値時降雨量について検討した。 $\{\rho_i\}$ としては、年間の極値雨量を選出し、その前後の隣接雨量のうちで和が大きい方との相関係数をとり、資料年数で平均化した値を使った。極値としては、1 位のみ、1~2 位、1~3 位の区別をした。図-4 はその 1 例であり、一

般にプロット点はかなりばらつくが、期間増減に伴う変化傾向は地実ごとにほぼ類似するようである。図中の曲線は、1~3 位の平均値を用い (20) 式による ρ_i の表記で、破線は 24 時間、実線は 12 時間を基準期間 m に採っている。この例のように、24 時間雨量を基準に採ると、理論値と実測値との間に差が大きく出るが、12 時間程度の雨量を基準にすれば、3 時間位までの配分はほぼ可能であるという結果が多くみられた。

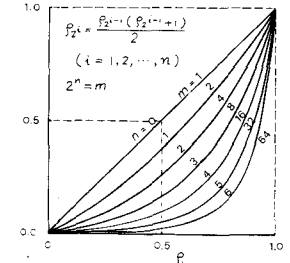


図-3 ρ_i と ρ_2^n の関係
豊川 1953-70

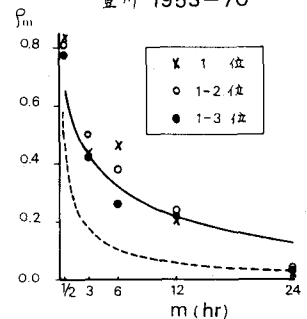


図-4 理論の検討