

京都大学 工学部 正 員 岩垣雄一
京都大学 大学院 学生員 〇石田 啓

1. 緒言 本研究は、円柱に作用する波力を Morison 公式にもとづかないで別の方法で研究するために、MacCamy, Fuchs らの誘導した回折理論から、円柱周辺の水粒子速度を求め、円柱壁面上の値を境界層外縁の速度として、円柱のまわりに発達する層流境界層内の水粒子速度とせん断力を算出し、計算例を示すとともに水粒子速度について若干の実験をおこなひ、その特性を論じたものである。

2. 理論 座標系を図-1 のようにとる。また以下の各式は Real Part をとる。

(1) 回折理論：円柱による回折散乱波の速度ポテンシャルは

$$\phi = \frac{gH}{2\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kR} \left[J_0(kR) - \frac{J_0'(kR)}{H_0^{(2)}(kR)} H_0^{(2)}(kR) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ J_n(kR) - \frac{J_n'(kR)}{H_n^{(2)}(kR)} H_n^{(2)}(kR) \right\} \cos n\theta \right] e^{i\sigma t} \quad \dots (1)$$

で表わされるが、これを θ および r で微分することにより、それぞれ θ 方向および r 方向の水粒子速度 U および V を、次式のように求めることができる。

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{gH}{2\sigma r} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kR} \left[-2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ J_n(kR) - \frac{J_n'(kR)}{H_n^{(2)}(kR)} H_n^{(2)}(kR) \right\} \sin n\theta \right] e^{i\sigma t} \quad \dots (2)$$

$$V = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{gH}{2\sigma} k \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kR} \left[J_0'(kR) - \frac{J_0'(kR)}{H_0^{(2)}(kR)} H_0^{(2)}(kR) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ J_n'(kR) - \frac{J_n'(kR)}{H_n^{(2)}(kR)} H_n^{(2)}(kR) \right\} \cos n\theta \right] e^{i\sigma t} \quad \dots (3)$$

ここに g は重力加速度、 H は波高、 k は波数、 σ は角振動数、 h は水深、 R は円柱の半径、 t は時間、 J_n および J_n' は n 次のベッセル関数およびその導関数、 $H_n^{(2)}$ および $H_n^{(2)'}(kR)$ は n 次の第2種ハンケル関数およびその導関数である。ところで(2)式および(3)式の収束性を調べるため、 $kR \approx 0.42$ の場合について、その項数を5, 10, 15, 20とした4種類について検討した結果、これらの差は最大0.01%程度であり、 U および V は上式から求めてさしつかえないことがわかった。しかし3. に示す計算例では、念のために各式の項数はすべて20とした。

(2) 境界層近似：簡単のために、ここでは $\partial \phi / \partial z$ の項を無視した2次元の層流境界層として取り扱うこととする。一般に境界層厚さ δ に比して曲面の曲率半径 R がはるかに大きい場合には、曲面上の境界層方程式は平面壁のときと同じ形になり、次式のように表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \quad \dots (4)$$

ここに u および v は x 方向および y 方向の水粒子速度、 p は圧力、 ρ は密度、 ν は動粘性係数、 U_0 は境界層外縁の水粒子速度であり、(2)式で $r=R$ とおいたものを用いる。次に $\frac{\partial U_0}{\partial x} \gg U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x}$ と仮定（微小振幅波理論の仮定）すれば、(4)式は、円柱が静水中を振動する場合の境界層の解法⁽²⁾とまったく同様に、successive approximation method により近似式を導くことができる。すなわち $u = U_0 + U_1 + \dots$, $v = V_0 + V_1 + \dots$ を(4)式に代入することにより、第1近似式および第2近似式としてそれぞれ次式が得られる。

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = \frac{\partial U_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0, \quad \text{境界条件 } y=0; U_0=V_0=0, y=\delta; U_0=U_0 \quad \dots (5)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} - U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} - V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0, \quad \text{境界条件 } y=0; U_1=V_1=0, y=\delta; U_1 \approx 0 \quad \dots (6)$$

(5)式から u および v の第1近似解が次のように求まる。

$$u = U_0 = \left\{ 1 - e^{-(1+i)\eta/\sqrt{2}} \right\} U_0 e^{i\sigma t} \quad \dots (7) \quad v = V_0 = -\sqrt{\frac{2\nu}{\rho}} \left[\frac{\eta}{\sqrt{2}} - \left\{ 1 - e^{-(1+i)\eta/\sqrt{2}} \right\} \right] \frac{dU_0}{dx} e^{i\sigma t} \quad \dots (8)$$

ここに $\eta = y/\delta$ である。またせん断力 τ の第1近似は(7)式の u を用いて、次式のように求めることができる。

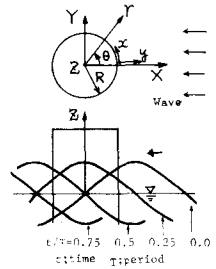


図-1 座標系

$$\tau = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \nu \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}} (1+i) e^{-(1+i)\eta/\sqrt{2}} U_0 e^{i\sigma t} \dots\dots (9)$$

また(6)式の u_1 は Schlichting により

$$u_1 = U_0 \frac{dU_0}{dx} \frac{1}{\sigma} \left(\zeta'_{1a} e^{2i\sigma t} + \zeta'_{1b} \right), \quad \left. \begin{aligned} \zeta'_{1a} &= -\frac{i}{2} e^{-(1+i)\sqrt{2}\eta'} + \frac{i}{2} e^{-(1+i)\eta'} - \frac{1}{2}(i-1)\eta' e^{-(1+i)\eta'}, & \eta' &= \eta/\sqrt{2} \\ \zeta'_{1b} &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{-2\eta'} + 2 \sin \eta' e^{-\eta'} + \frac{1}{2} \cos \eta' e^{-\eta'} - \frac{\eta'}{2} (\cos \eta' - \sin \eta') e^{-\eta'} \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

で与えられており、したがって u の第2近似解は、(7)式と(10)式の和として計算できるが、境界層外縁で質量輸送速度 $-\frac{3}{4} \frac{1}{\sigma} U_0 \cdot dU_0/dx$ が存在することとなる。

(3)無次元表示：上記諸量のうち、水粒子速度は gTH/R で割り、圧力およびせん断力は ρgH で割って無次元化すると、 U 、 V および p は L/h および L/R をパラメータとし、変数 η/h 、 r/R 、 θ および t/T の関数となり、 u および v 、 τ はさらに $\sqrt{\nu T/R}$ がパラメーターとして加わる。ただし L は波長、 T は周期である。

ここでは主として r/R 、 θ および t/T による諸量の変化を調べることにする。

3. 結果および考察 回折散乱波の水粒子速度を調べるため、長さ17.5m、高さ75cm、幅1.5mの水槽の中央に、半径10cmのアクリル製円柱を設置し、直流パルス発生器を用い、円柱側壁から水平に張った白金線より水素気泡列を発生させ、これを写真撮影して U の値を読み取ったが、実験条件 $H/h=0.082$ 、 $L/h=10.52$ 、 $L/R=47.3$ 、 $\sqrt{\nu T/R}=0.016$ 、 $\eta/h=0.22$ 、 $\theta=90^\circ$ に対して実験した1例を(図-2)に示す。

U は円柱に近づくほど大きくなり、(2)式で求めた理論値とほぼ合っている。

[写真-1]は、境界層内の水粒子の挙動を見るため、同様の条件下で連続的に水素気泡を発生させ、 $t/T \approx 0.125$ のときに撮影したものであり、境界層内の水素気泡は、主流の気泡に比べて相当前方に進んでいることがわかる。

次に $L/h=3.31$ 、 $L/R=14.9$ 、 $\eta/h=0.22$ 、 $\sqrt{\nu T/R}=0.01$ の場合の境界層内の諸

量の計算例を示す。(図-3)は、 $r/R=1.01$ 、 $\theta=90^\circ$ に固定した時の U 、 V 、 u および v の第1近似の時間変化を比較したものであり、 U および V の位相は入射波の位相よりわずかに遅れるが、 u および v の位相は逆に進む結果となる。(図-4)(1)~(5)には横軸に r/R をとり、各 θ 別に、第1近似(実線)および第2近似(点線)による U の速度分布を示した。第1近似では t/T が0.5以上のものは、半周期前の速度の符号を変えたものとなる。

境界層厚さは、 $\sqrt{\nu T/R}$ の値に支配され、 $\nu \cdot T$ が大きくなるにつれ、 δ も増加するが、 $\sqrt{\nu T/R}=0.01$ とした本計算例では δ は R の2~3%となった。また u の第2近似では、 $\theta < 90^\circ$ では波の進行方向に質量輸送速度があり、 $\theta > 90^\circ$ では逆方向に質量輸送速度が生じるが、 $\theta=90^\circ$ では $dU_0/dx=0$ であり第2近似は第1近似と一致する。

(図-5)(1)、(2)は V の第1近似を示したものであり、その大きさは、 u に比べて相当小さい。また V の向きは、 u が正の時には $\theta < 90^\circ$ では円柱中心方向を向き、 $\theta > 90^\circ$ では円柱から離れる方向となる。

(図-6)は、横軸に θ をとり、円柱まわりのせん断力 $\tau/\rho gH$ の分布を示したものである。 $t/T=0.375$ および 0.875 において、 $\theta=70^\circ$ 付近で0となり、その前後で u の方向が逆転していることを示しているが、この θ は t/T により変化することは言うまでもない。またその大きさは、(図-7)に示した圧力(静水圧を除く)に比べてはるかに小さく、波力として寄与する割合も圧力に比べれば無視できる程度である。以上より、波による層流境界層では、定常流の場合と異なり主流の速度 U が時間的に振動するために境界層内の水粒子速度 u の位相が U の位相よりも進む結果となり、本計算例では、定常流の場合に生じるような層流剥離は発生しないと言える。

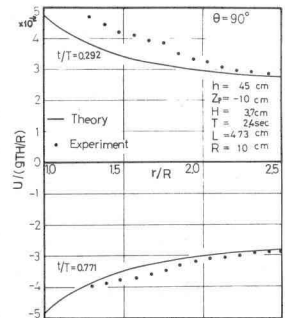


図-2 U の実測値と理論値

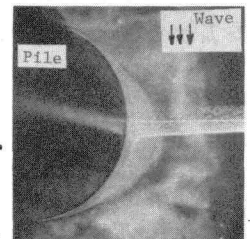


写真-1 境界層

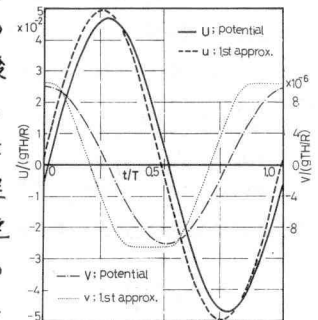


図-3 U, V, u, v の時間変化

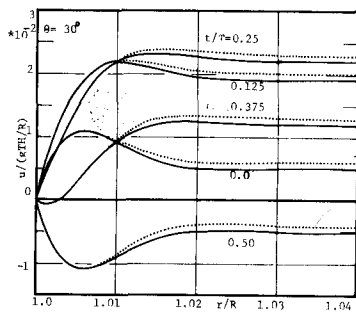


図4(1) u の分布 ($\theta = 30^\circ$)

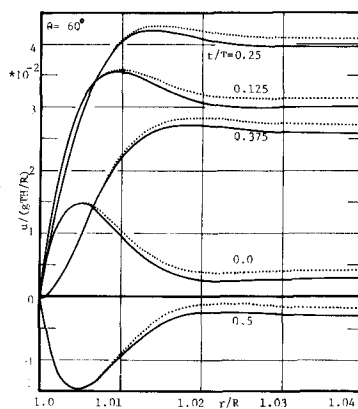


図4(2) u の分布 ($\theta = 60^\circ$)

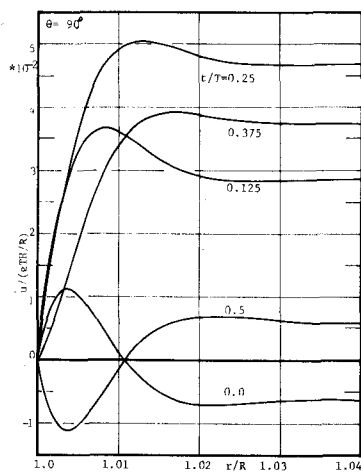


図4(3) u の分布 ($\theta = 90^\circ$)

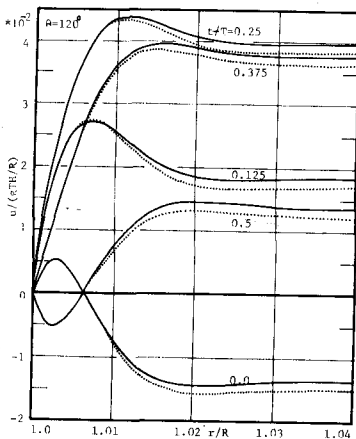


図4(4) u の分布 ($\theta = 120^\circ$)

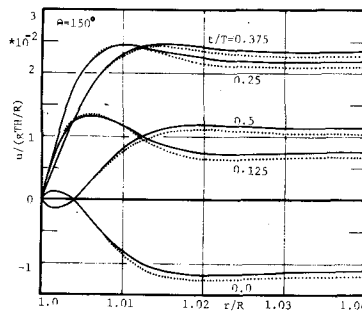


図4(5) u の分布 ($\theta = 150^\circ$)

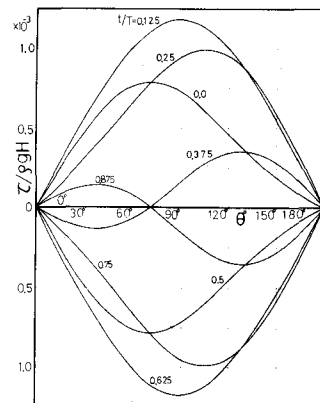


図6 セン断力での分布

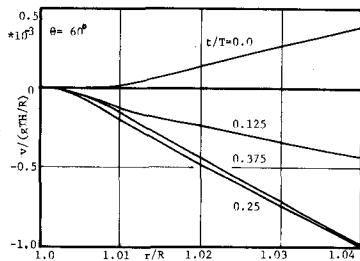


図5(1) v の分布 ($\theta = 60^\circ$)

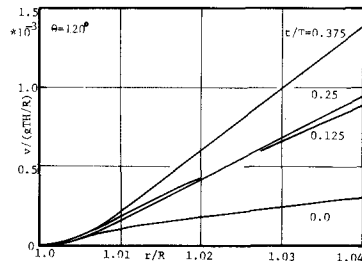


図5(2) v の分布 ($\theta = 120^\circ$)

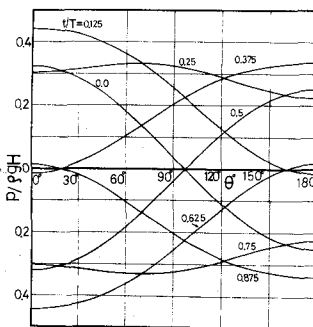


図7 圧力 P の分布

4. 結語 本研究では、円柱まわりの角度および時間を変えて種々の諸量の特性を調べたが、今後 L/R および $\sqrt{t}/R$ を変化させてそれらの影響を知ることが必要である。なお境界層方程式で $\partial^2/\partial z^2$ の項を無視したが、鉛直方向の水粒子の運動が境界層の内部機構に強く影響するような場合には、3次元境界層方程式として解く必要がある。さらに、広範囲の実験により回折散乱波の水粒子速度の特性を知るとともに、境界層内の水粒子の挙動を実測することは、剝離現象およびそれに関連する波力の問題にとって重要であると考えられる。

【参考文献】1) McComy, R.C., Fuhs, R.A.: Wave force on piles: diffraction theory, Tech. Memo, No. 69, BEER, 1954

2) Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, 1968, pp.393~414

3) 若垣雄一・土屋義人・坂井順行・陳 活雄: 海底摩擦による波高減衰機構に関する研究—層流境界層の場合、京都大学防災研究所年報第9号, 1966, 3, pp.647~665