

京大防災研 正会員 土屋義人
京大大学院 学生会員 O 安田孝臣

1. 緒言

浅海における波浪の変形に関しては、最近各種の研究が進められ、実用的にもまた波の理論の進展にも大きく寄与する成果がえられている。とくに、1895年 Kortweg-de Vries によつて見出されたクリイド波理論の使用性があらためて認識されるとともに、Laitone らによる高次の近似解もえられて理論の発展がなされたことは周知のとおりである。一方、k-dV 方程式はプラズマ波と非線形波動の近似理論における基礎式として海岸波浪のみならず各方面への応用が重視されてきたが、それは定常解として存在する孤立波が唯一の固有値をもち、かつ粒子的振動をなすことが見出されつつあるからと思われる。この観点から、この方程式にもとづく数値実験が試みられてきたが、1970年 Zabusky-Galvin らは波浪に対して適用し、水の波の場合にもいわゆるソリトンが発生することを確認している。ところが、いずれの研究においても浅海における波浪にシミュレートした研究が少く、現象への対応が十分とはいえないと思われるので、本文では同様の数値実験によつて浅海における波浪の変形を取扱い、波形変化とソリトンの発生などについて考察することとした。

2. 基礎方程式と数値模型

(1) 基礎式 図-1に示す座標を用いれば、波理論の基礎式は周知のように次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi = 0, \quad \phi_t + (1/2)(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\phi|_{z=h} = 0 \\ h_t + h_x \phi_x - \phi_z|_{z=h} = 0, \quad \phi_z|_{z=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 ϕ は運動ポテンシャルであり、また h は図に示すように水位変動をあらわす。

いま、 $\phi = \phi/c_0 L$, $z^* = z/L$, $x^* = x/L$, $t^* = t c_0/L$, $h^* = h/L$ (2)

とし、 $\zeta = \varepsilon^{1/2}(x^* - \nabla_0 t^*)$, $\tau = \varepsilon^{3/2} x^*$, $z = z^*$ (3)

であらわされる Gardner-Morikawa 変換を行ない、 h^* および ϕ についてのせつ動解を ε^2 近似まで求めれば、それぞれつぎのようになる。すなわち、 ε^1 近似式として、

$$\zeta_\tau + (3/2)(\nabla_0/h_0^*)\zeta\zeta_\zeta + (1/6)h_0^*\nabla_0\zeta\zeta_{\zeta\zeta} = 0 \quad (4)$$

がえられ、また ε^2 近似式として次式が得られる。

$$h_{\tau\tau} + \{2\nabla_0 h_{1\zeta} + \nabla_0 h_{1\zeta\zeta}/h_0^*\}h_2 + (\nabla_0/h_0^*)h_1 h_{\zeta\zeta} - \frac{1}{2}h_0^2 h_{1\zeta}\tau + 3h_0\nabla_0 h_{1\zeta} h_{1\zeta\zeta} - \frac{1}{30}h_0^4 \nabla_0 h_{1\zeta\zeta\zeta\zeta} = 0 \quad (5)$$

ここに、 h_0^* , h_1 , h_2 , h^* の関係は $h^* = h_0^* + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + O(\varepsilon^3)$ である。

周知のように、(4)式はいわゆる k-dV 方程式であり、初期波高を H_0 として、

$$\zeta^* = (3/2)\zeta/H_0^*, \quad H_0^* = H_0/L, \quad \tau = (H_0^*\nabla_0/h_0^*)\zeta \quad (6)$$

とすれば、次式のように規格化されて定数 μ のみによつて特性づけられることになる。

$$\zeta_\tau^* + \zeta^*\zeta_{\zeta\zeta}^* + \mu\zeta_{\zeta\zeta\zeta}^* = 0, \quad \mu = (1/6)(h_0^3/H_0^*) \quad (7)$$

(6)式において、左辺第2項はいわゆる波の steepening に、また第3項は smoothing に対して寄与し、定数 μ がそれぞれ両方の平衡関係を規定することになる。 $\mu = (1/6)(h_0^3/L^3 H_0) = (1/6)(1/U_s)$ (ここに U_s は Ursell parameter) と変形されるので、k-dV 方程式が適用される浅海領域における波浪特性がこの μ を値を決定し、それによつて変形が規定される。

一方、図-2に示すような傾斜海岸に対する基礎式としては、すでに Mei らある(1)は角谷によつて与えられているが、ここで同後者の式をあげれば次式のようになる。

$$\zeta_\tau + (3/2)(g/\nabla_0^2)\zeta\zeta_\zeta + (1/6)(\nabla_0/g^2)\zeta\zeta_{\zeta\zeta} - (1/4)(G\beta/\nabla_0^2)\zeta = 0 \quad (8)$$

ここに、 β は海底勾配をあらわす。ただし、(8) 式または(4) 式または(7) 式に対応した第1次近似式であるが、同様に(5) 式に対応した第2次近似式もえられるが省略する。

(2) 数値模型 (4) 式または(7) 式および(8) 式によ、て浅海における波浪の変形を考察することにするが、この場合の初期条件としては、Stokes 波を与え、それがソリトンに分裂するかどうかを調べ、ソリトン間の固有値の特性を表示することにする。ただし、一様水深の場合には定数 μ の値の大小によ、て波の変形特性に大きく相違するので、適当な水深変化を与えることにする。

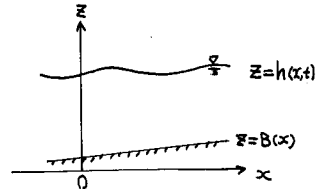


図-2 座標系

3. 数値計算の方法

(1) 階差式 (7) 式および(8) 式の階差式としては、implicit methodを適用すれば、(7) 式に対して、

$$\begin{aligned} & (\xi_j^{n+1} - \xi_j^n) / (2\Delta\tau) + (\xi_{j+1}^n + 2\xi_j^n + \xi_{j-1}^n)(\xi_{j+1}^{n+1} + \xi_{j-1}^{n+1} - \xi_{j+1}^n - \xi_{j-1}^n) / (16\Delta\xi) \\ & + \mu \{ \xi_{j+2}^{n+1} + \xi_{j+2}^n - 2(\xi_{j+1}^{n+1} + \xi_{j+1}^n) + 2(\xi_{j-1}^{n+1} + \xi_{j-1}^n) - \xi_{j-2}^{n+1} - \xi_{j-2}^n \} / \{ 4(\Delta\xi)^3 \} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

と見るが、Zabusky は次式の表現を用いて数値実験を行なっている。

$$\{ \mu / (\Delta\xi)^3 \} [\xi_{j+2}^{n+1} - 3\xi_{j+1}^{n+1} + 3\xi_{j-1}^{n+1} - \xi_{j-2}^{n+1}] + (1/8\Delta\xi) [\xi_{j+2}^{n+1} + \xi_{j+2}^n] [\xi_{j+2}^{n+1} + \xi_{j+1}^n - \xi_j^{n+1} - \xi_{j-1}^n] = 0 \quad (10)$$

ここに、 $\Delta\tau = (\Delta\xi)^3 / 4\mu$ としている。

同様に、(8) 式は(9) 式に対応した次式がえられる。

$$\begin{aligned} & (\xi_j^{n+1} - \xi_j^n) / (2\Delta\tau) + (\xi_{j+1}^n + 2\xi_j^n + \xi_{j-1}^n)(\xi_{j+1}^{n+1} + \xi_{j-1}^{n+1} - \xi_{j+1}^n - \xi_{j-1}^n) / (16\Delta\xi) + \mu_1 \{ \xi_{j+2}^{n+1} + \xi_{j+2}^n \\ & - 2(\xi_{j+1}^{n+1} + \xi_{j+1}^n) + 2(\xi_{j-1}^{n+1} + \xi_{j-1}^n) - (\xi_{j-2}^{n+1} + \xi_{j-2}^n) \} / \{ 4(\Delta\xi)^3 \} - (\mu_2/4) (\xi_j^{n+1} + 2\xi_j^n + \xi_j^{n-1}) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 $\mu_1 = \nabla_0^4 / (6G^3 H_0^3)$ 、 $\mu_2 = \beta / (4G \nabla_0)$ (12)

(2) 計算法 数値計算は(9) 式および(11) 式からえられる連立方程式を $[A]\{\xi^n\} = \{\xi^n\}$ なるマトリックス表

示し、 $[A]$ を三角マトリックスに変換し、回き出法によ、て計算した。

4. 計算結果と考察 図-3は(9) 式によ、て計算した一例であるが、(a) は $\mu = 0.0034 (h/L = 0.101, H/h = 0.5)$ 、(b) は $\mu = 0.001 (h/L = 0.067, H/h = 0.75)$ および(c) は $\mu = 0.0025 (h/L = 0.055, H/h = 0.2)$ の

場合である。ただし、(b) は $h \rightarrow (2/3)h$ として μ の値を小さくした場合を示す。これらは計算結果の一例にすぎないが、図-4に示す

Galvin による浅海域よりの発生波の波形的分類と比較すると、規則波とソリトン発生との境界に(a)が属し、また(b)はさらに H/h の大きい領域に

属し、いずれも計算ではソリトンが発生せずクイッド波に近い波形を示すが、steepening の効果はかぎり著しいことがわかる。

一方、(c) は図-4と比較して2つのソリトンが発生する領域に属し、計算結果もこのことを示している。また発生したソリ

トンが波高によ、て規定される波速ではほぼ一致し、相互関係に次第に差をもつようになることがよくわかる。

5. 結 語 以上はK-dV方程式を浅海における波の変形に適用した

若干の計算結果について述べたが、計算結果も十分に良く、また傾斜海

流の場合を示すことができると、こので、議論時には一連の計算結果を

示して、浅海における波の変形について考察することにした。

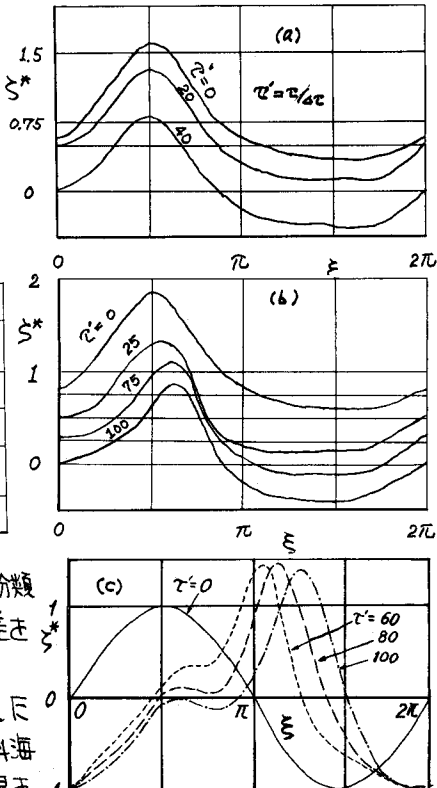


図-3 波の変形の計算結果の散例