

東京大学工学部 正員 堀川 清司
東京大学大学院 専攻員 小口 優

1. はじめに

振動乱流境界層は、潮汐、地形変化など海岸工学上重要な応用面をもっている。現在までのところ、唯一の理論と言える根拠のモデルは、時間的に一定な乱流粘性係数を持ち、周期平均的な解を与えている。ここでは、乱流のエネルギー方程式に、定常流からのアナロジーによる乱流の構造の仮定を導入することにより、十分に乱れた2次元振動乱流境界層の乱流の数値計算を試み、周期内の変化を求めた。

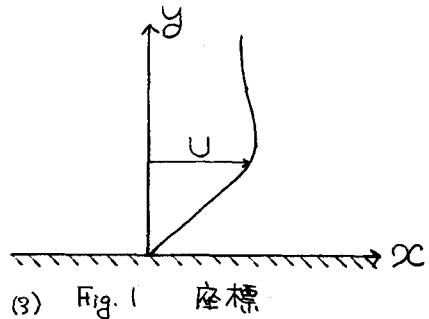
2. 基礎方程式

Navier-Stokes の方程式と連続の式において、平均量（以下では、大文字を使用する。）と変動量（小文字）を分離すると、次の式を得る。

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} P \delta_{ij} + \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{q}^2 \right) = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \bar{q}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{\bar{q}^2}{2} \right) \nu + \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \bar{q}^2 \right) - 2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\}$$



但し、 $\bar{q}^2 = \overline{u_i u_i}$ である。

座標は、Fig. 1 のようにとる。そして、2次元振動流の仮定（鉛直方向の代表的な長さ、長さ方向のせん断に比して無視される。）を、平均量に適用し、乱流の時間スケールが、平均流のせん断に比して無視されるとすると、最終的に次の式を得る。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U_\infty}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{q}^2 \right) = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{\bar{q}^2}{2} \right) \nu - \epsilon \quad (5)$$

但し、 U_∞ ：境界層外での流れ方向の流速、 $\frac{\tau}{\rho} = -\overline{u v}$ 、 ϵ ：粘性散逸である。ここで、(5)式は乱流のエネルギーの平衡を表しており、各項はせん断、時間変化、生成、拡散、散逸に対応している。

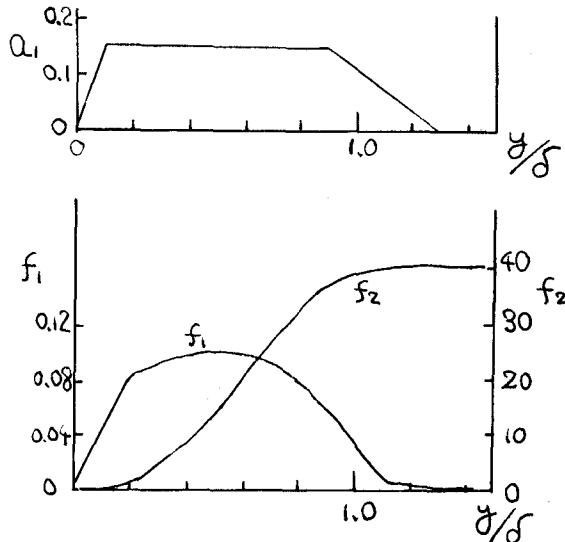


Fig. 2 相似性の関数形

3. 乱流の構造の仮定

(4)、(5)式を閉じた方程式とするために、圧力勾配の変化する定常流において、Bradshaw et al. が用いた型の仮定を採用する。

$$(i) \frac{\tau}{\rho} = a_1 \bar{q}^2$$

$$(ii) \epsilon = \frac{1}{L} \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{3/2}$$

$$(iii) \left(\frac{P}{\rho} + \frac{g^2}{2}\right)^{1/2} v = G \cdot \left(\frac{\tau_{max}}{\rho}\right)^{1/2} \frac{\tau}{\rho} \quad (6)$$

但し、 α, L, G は、境界層の厚さ δ を基準として、鉛直方向に一定の関数形を仮定する。定性的な議論と実験データより、Fig. 2のように与えられる。(図中の記号のうち、 $f_1 = L/\delta$, $f_2 = G U_\infty / (\tau_{max}/\rho)^{1/2}$ である。)

これらを(6)式に代入すると次の式を得る。

$$\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tau}{\rho}\right) = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} - \left(\frac{\tau_{max}}{\rho} / U_\infty\right) \frac{\partial}{\partial y} \left(f_2 \frac{\tau}{\rho}\right) - \frac{1}{f_1} \left(\frac{\tau}{\rho}\right)^{3/2} \quad (7)$$

(4), (7)式は、 $\frac{\tau}{\rho}$, ρ を未知数とする非線形な連立偏微分方程式となる。よって、基本的には、双曲型となる。

4. 境界条件、初期条件及び方程式の無次元化

境界条件としては、次の形を用いた。

$$U|_{y=0} = 0, \quad \frac{\tau}{\rho}|_{y=0} = U \frac{\partial U}{\partial y}|_{y=0} \quad (8)$$

$$U|_{y=\infty} = U_\infty, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho}\right)|_{y=\infty} = 0 \quad (9)$$

なお、境界層外での流速変動は、 $U_\infty = \hat{U}_\infty \sin \frac{\pi}{T} t$ で与えられるものとした。

初期条件としては、平均流速 U については、層流理論解による分布を、レイノルズ応力 τ は、境界層内で一様な強さの乱れを与えることにより設定した。

次に、代表的な量として、 $\hat{U}_\infty, \delta, T$ を用いて、(4), (7)式を無次元化すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} - K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho}\right) = \frac{d}{dt} \sin 2\pi t \quad (10)$$

$$\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tau}{\rho}\right) = K \left\{ \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{(\tau_{max}/\rho)}{1 \sin 2\pi t} \frac{\partial}{\partial y} \left(f_2 \frac{\tau}{\rho}\right) - \frac{1}{f_1} \left(\frac{\tau}{\rho}\right)^{3/2} \right\} \quad (11)$$

となり、パラメータ $K (= T U_\infty / \delta)$ が、重要な量となっている。

5. 計算及びその結果

計算は(10), (11)式を空間的には中央差分、時間的には前方差分を用いて行なった。なお、境界層の厚さの基準としては、 U_∞ の99.5%になる地点をとった。計算を試みたケースは、 $U = 0.01 \text{ cm/sec}$, $T = 9.0 \text{ sec}$, $\hat{U}_\infty = 10, 20, 80 \text{ cm/sec}$ の3ケースである。

$\hat{U}_\infty = 20 \text{ cm/sec}$ のケースを例にとり、特性を示す。(≡ $Re = \frac{\hat{U}_\infty \delta}{\nu}$, $\delta_L = \sqrt{\frac{\nu T}{\pi}}$ である。)

(i) Fig. 3は、境界層の厚さ($\delta_{99.5}$)をパラメータとして、収束性を示す。この例では、10周期目で、定常に達したといえる。収束性は、 K の値が大きくなるにつれて、悪くなる傾向を示した。

(ii) Fig. 4は、10周期目の平均流速の基本周期量、レイノルズ応力の最大値の空間分布を示す。

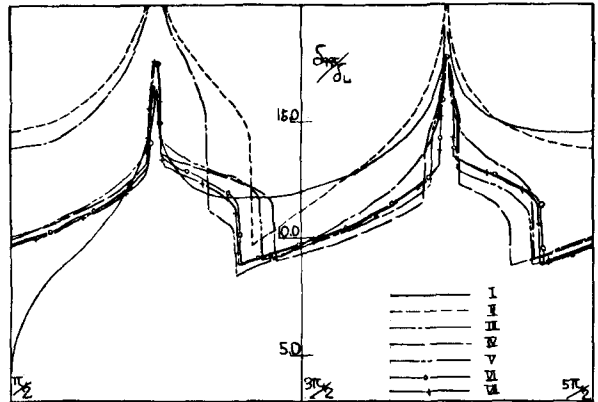


Fig. 3 $\delta_{99.5}$ の変化 — 収束性

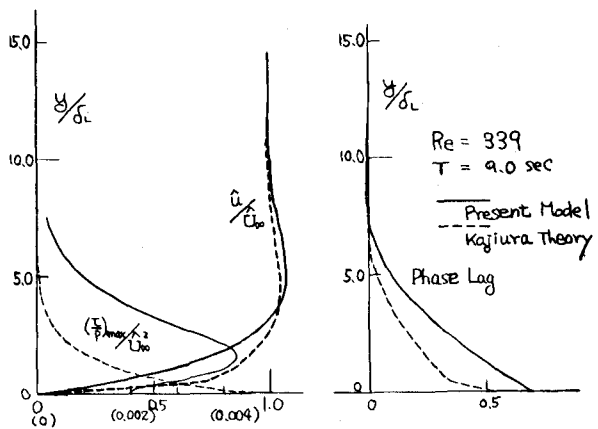


Fig. 4 流速分布の空間特性

平均流速は、層流に比して、鉛直方向のスケールが
ほぼ2倍になっている点を考慮すると、ほぼ相似で
あった。図中の点線は、従来の理論によるものであ
る。なお、今回の計算では、平均流速は、わずかな
がら正弦変動と異なつた。

(ii) Fig. 5は、同じくレイノルズ応力の半
周期間の変化を示す。底面では、正弦的変動を示す
が、底面から遠ざかるにつれて、非対称性を増し、
位相も進んでいく。なお、 $\tau = \pi$ における急激な減
少は、拡散項によるものであり、 $\pi \sim 3\pi/2$ でみられ
る急激な増加は、 $\tau = \pi/2$ の不連続性減少によるも
のである。

(iii) Fig. 6, Fig. 7は、 $\tau = 0$ の異なる場合の底面摩
擦係数及び底面での位相の進みを示す。

6. 問題点と考察

Fig. 4での機構理論との比較及びFig. 6で計算
値が層流時の値より小さくでこいることから、この
モデルは、底面での境界条件におけるレイノルズ応
力に関する条件と流れ構造の仮定、特に(ii)との間
に適合性を欠くことが推察される。相似性層と呼ば
れる層の存在を取り入れることが必要であることを
示しているものと受け止める。その他、Fig. 3におけ
る不連続性、境界層の厚さの定義、相似性の意味な
どと関係して、物理的には問題がある。

今回の計算の試みの結論としては、今後の課題
として、底面での境界条件の与え方、相似性の妥当
性など、実験による現象論の確立が望まれる。

最後に、計算は、東京大学大型計算機センタ-
HITAC 5020及び HITAC 8800/8700の両シ
ステムを使用した。

参考文献

- (i) P. Bradshaw, D.H. Ferris and N.P. Atwell,
J. F. M., 28, 1967, P. 593.
- (ii) K. Kajiura, Bull. Earthq. Res. Inst.
Univ. of Tokyo, 46, 1968, P. 75.

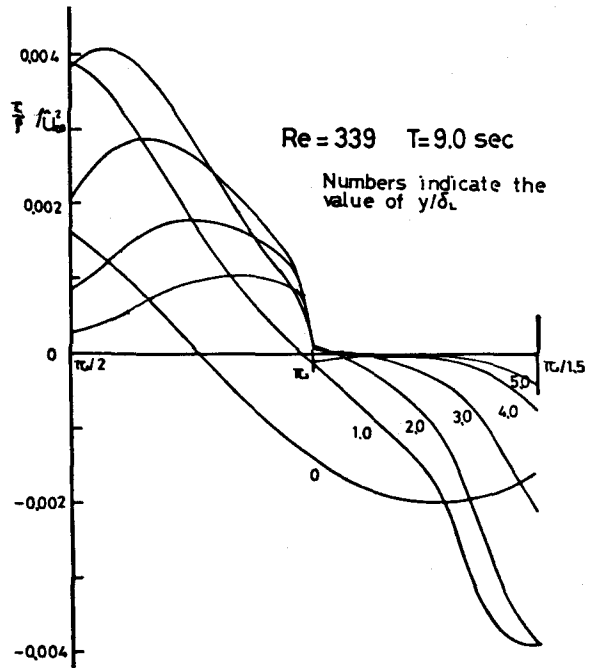


Fig. 5 レイノルズ応力の時間変化

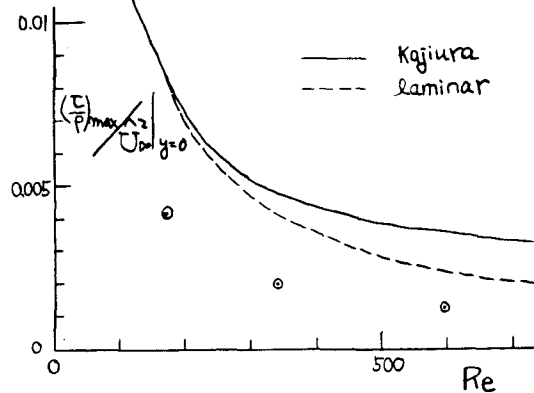


Fig. 6 底面摩擦係数

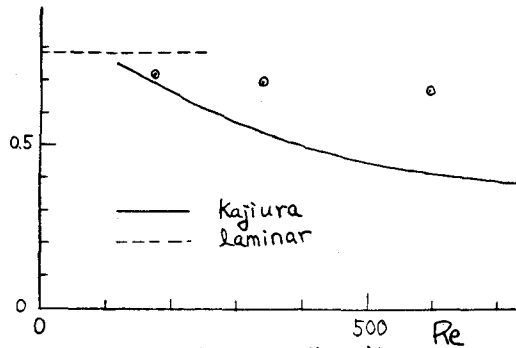


Fig. 7 底面での位相差