

熊本大学工学部 正員 〇秋吉 卓  
 熊本大学工学部 学生員 滝川 清  
 熊本大学工学部 学生員 古川和義

1. まえがき 近年の築造物の大型化に伴って、埋設構造物、特に水中に設置される土木構造物の耐震安全性が重視されるようになってきた。従来の沈埋トンネルと比較して、浮力を利用した浮トンネルは相当経済的であるので、海峡横断の長大橋はいしは長大掘くトンネルの比較策として検討されたこともあるが、いまだ実現には至っていない。ところでこのような水中構造物系の振動解析において、その断面形状が単純なものについては解析解が得られているが、<sup>4)</sup> 複雑で一般的な断面に対して適用しがたいようである。そこで本研究では、近年流体の問題に関して著しい進展を遂げつつある有限要素法を用いて、水中構造物の解析を試みた。

2. 有限要素法による流体の取扱 図-1 のような、構造物をとりまく二次元平面の流体を考へる。さらに水の圧縮性を無視すると、動水圧  $p$  は次式を満たす。

$$\partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial z^2 = 0 \quad \dots\dots (1)$$

このとき、境界条件として

$$\begin{aligned} z=0: \partial p / \partial z = 0, \quad z=H: p = 0, \\ \text{構造物表面上: } \partial p / \partial n + \rho = 0 \quad (\rho: \text{境界外向法線方向}) \end{aligned} \quad \dots\dots (2)$$

かかるに、境界条件(2)のもとに式(1)を解くことは、 $p$  に関する次の汎関数を最小化することと等価である。

$$\chi = 1/2 \cdot \iint_D [(\partial p / \partial x)^2 + (\partial p / \partial z)^2] dx dz + \int_C \rho p ds \quad \dots\dots (3)$$

ここで、水の左右の境界  $B_L, B_R$  により区切られた領域を三角形要素に分割すると、図-2 のような要素内の動水圧  $p(x, z)$  はこの節点値  $\{p_i, p_j, p_m\}$  により、次式で与えられる。

$$p(x, z) = [N_i, N_j, N_m] \{p\}^e \quad \dots\dots (4)$$

ただし、 $N_i = (a_i + b_i z + c_i z^2) / \Delta$ ,  $\{p\}^e = \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \\ p_m \end{Bmatrix}$ ,  $\Delta$ : 三角形  $ijm$  の面積、 $a_i = x_j z_m - x_m z_j$ ,  $b_i = z_j - z_m$ ,  $c_i = x_m - x_j$ ,  $\dots$

この要素の汎関数を  $\chi^e$  とすると、 $\{p\}^{eT} = \{p_i, p_j, p_m\}$  が最小化により

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{p\}^e} = \iint_D \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] dx dz + \int_C \rho \frac{\partial p}{\partial p_i} ds = [k] \{p\}^e + \{f\}^e = 0 \quad \dots\dots (5)$$

ここで、 $[k]^e$  の要素  $k_{pq}$  は  $k_{pq} = (b_p b_q + 6 c_p c_q) / \Delta$ ,  $f_p = \Delta_{ijm} / 6 \cdot (2 \delta_{ij} + \delta_m)$ , ( $p, q = 1, 2, 3$ )  $z$ -軸方向、 $\{f\}^e$  の値は外部境界にのみ存在する。したがって、領域全体の汎関数  $\chi = \sum \chi^e$  を最小化するには、全節点ベクトルを  $\{p\}$  とすると、 $\partial \chi / \partial \{p\} = 0$  より、結局次式をうる。

$$[H] \{p\} + \{F\} = 0 \quad \dots\dots (6)$$

ここで、 $H_{ij} = \sum k_{ij}$ ,  $F_i = \sum f_i$  である。

そこで、図-3 のように水中構造物が水平右方に加速度運動するとき、構造物表面の節点加速度を  $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  とすれば、境界面の  $\{\rho\}_s$  は次式で与えられる。

$$\{\rho\}_s = \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_r \end{Bmatrix} = -S \begin{bmatrix} n'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n'_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (7)$$

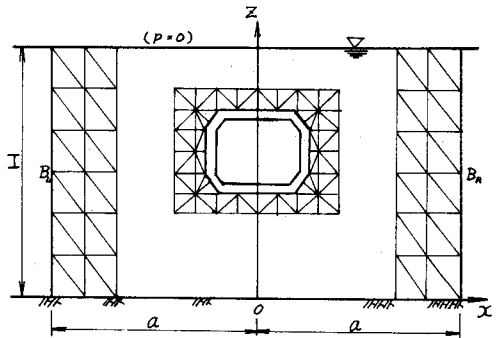


図-1 水中構造物のモデル

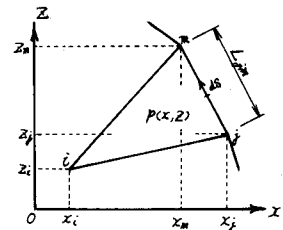


図-2 三角形要素  $ijm$

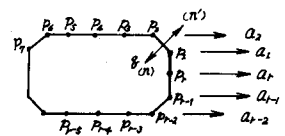


図-3 構造物の水平運動

ここに、 $n_i$ は構造物表面より水中へ正とする方向余弦である。  
かくして、式(6)より構造物表面に発生する節点動水圧  $\{P\}_s = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_r \end{Bmatrix}$  は次式で与えられる。

$$\{P\}_s = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_r \end{Bmatrix} = -[E_1] \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_r \end{Bmatrix} = \frac{\rho}{6} [E_1][L][n'] \{a\}_s = -[M_0] \{\delta\}_s \quad \dots\dots (8)$$

ここに、 $[M_0] = \frac{\rho}{6} [E_1][L][n']$ ,  $[n'] = \begin{bmatrix} n_1' & 0 \\ 0 & n_2' \end{bmatrix}$ ,  $\{a\}_s = \begin{Bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$ ,  $[H]^{-1} = \begin{bmatrix} r & n+r \\ E_1 & \dots \end{bmatrix}$ ,

$$[L] = \begin{bmatrix} 2(L_{11}+L_{12}) & L_{12} & \dots & L_{r1} \\ L_{12} & 2(L_{12}+L_{22}) & \dots & L_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{r1} & L_{r2} & \dots & 2(L_{r1}+L_{r2}) \end{bmatrix}, \quad \left( \begin{array}{l} L_{ij}: \text{節点間の長さ} \\ \text{添字 } r: p=0 \text{ (水面) とする節点の個数} \end{array} \right)$$

したがって、式(8)の圧力  $\{P\}_s$  を節点力  $\{R\}_s$  に換算したものは、構造物への外力と考えられ、次式で与えられる。

$$\{R\}_s = [A] \{P\}_s = [A][M_0] \{\delta\}_s = -[M_p] \{\delta\}_s \quad \dots\dots (9)$$

ただし、 $[M_p] = [A][M_0]$ ,  $[A]$ : 圧力を節点に割りつけるマトリックス。

3. 境界  $B_L, B_R$  の取扱 1) 図-1のように、左右の境界  $B_L, B_R$  で仕切られた有限領域の場合は、動水圧  $p$  の境界条件として、水面  $z=0$ , およびその他の側方・木底  $z=0/p/n=0$  を用いて解いたことになるが、一方、側方の境界のない半無限領域を考える場合は、構造物表面で発生した動水圧が距離とともに指数的に減少するという連続体解析の結果を考慮した外力を境界に加えることにより、これを有限領域の問題として取扱うことができる。そこで三角形要素を2個組合せた矩形要素を用いると、要素内動水圧  $p(x, z)$  は

$$p(x, z) = [N_i, N_j, N_m, N_n] \{P\}^e \quad \dots\dots (10)$$

ここに  $\{P\}^e = \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$ ,  $N_i = (1-3x)(1-z)$ ,  $N_j = 3(1-z)$ ,  $N_m = 3z$ ,  $N_n = (1-3z)$ ,  $\xi = x/a$ ,  $\eta = z/b$

このとき、式(6)の  $[H]$  に相当する、図-4(b)の柱状体の  $[H']$  は

$$[H'] = \frac{\rho}{6b} \begin{bmatrix} 6+a^2(a^2-b^2) & -6-(6a)^2 & & & & & \\ -6-(6a)^2 & 12+2a^2(a^2-b^2) & & & & & \\ & & -6-(6a)^2 & & & & \\ & & & 12+2a^2(a^2-b^2) & & & \\ & & & & -6-(6a)^2 & & \\ & & & & & 6+a^2(a^2-b^2) & \\ & & & & & & -6-(6a)^2 \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 4 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

よって、 $[H'] \{P\} - (6a)^2 [A] \{P\} = 0 \quad \dots\dots (11)$

を満たす固有値  $\{\alpha_s\}$ , エイタルマトリックス  $[Q] = [q_1, q_2, \dots, q_m]$  を求めておくと、式(6)の  $\{F\}$  にさらに加える外力項  $\{F\}_R$  は、 $[Q]$  を用いて次式のように展開される。

$$\{F\}_R = b/6 \cdot [A][Q][\alpha] \{p\} = b/6 \cdot [A][Q][\alpha][Q]^T [A] \{P\} = [R]_R \{P\} \quad \dots\dots (12)$$

ただし、 $[Q]^T [A][Q] = [I]$  とし、 $\{P\}_R$  は境界  $B_R$  における動水圧ベクトル。同様にして左側境界  $B_L$  についても、

$$\{F\}_L = b/6 \cdot [A][Q][\alpha'] [Q]^T [A] \{P\} = [R]_L \{P\} \quad \dots\dots (13)$$

このとき、 $[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$ : 固有値マトリックス,  $[\alpha']$ :  $[\alpha]$  の負の値,  $\{P\}_0$ : 境界  $B_0$  の動水圧ベクトル。

かくして、上記の  $\{F\}_R, \{F\}_L$  を式(6)の左辺に加えるためには、各々の  $[R]_R, [R]_L, \{P\}_R, \{P\}_L$  を領域  $\Omega$  の大きさに拡大しなければならない。

#### 4. 水中構造物の振動解析 構造物表面の持つ加速度は各点共に等しいと

見なすものとして、図-5(a)の圧力による水平合力  $R$  は式(9)より

$$R = -M_E \cdot \partial^2 u / \partial t^2 \quad \dots\dots (14)$$

ただし、 $u$ : 構造物のたわみ,  $M_E = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m M_{p,ij}$ ,  $M_{p,ij}$ :  $[M_p]$  の  $ij$  要素  
水中構造物が図-5(b)のように、外力  $f(t)$ , 両端固定梁の運動方程式は

$$M \partial^2 u / \partial t^2 + EI \partial^4 u / \partial x^4 = f(t) + R \quad \text{すなわち} \quad (M + M_E) \partial^2 u / \partial t^2 + EI \partial^4 u / \partial x^4 = f(t) \quad \dots\dots (15)$$

すなわち、 $M_E$  は付加質量の効果を表わしている。最後に本研究の一部は47年度西部支部発表会で発表したが、その後の結果は講演時に示す。

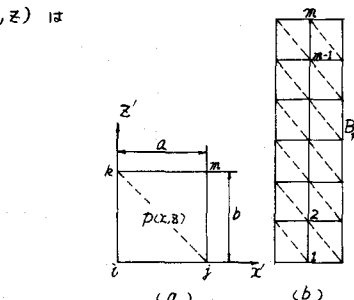


図-4 境界  $B_L, B_R$  における組合せ矩形要素

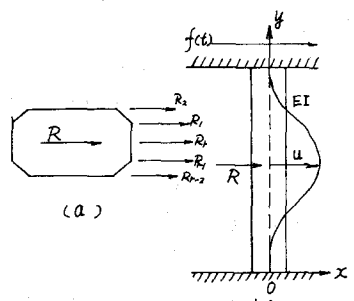


図-5 水中構造物の振動形

参考文献 1) 梶島, 田淵地: 工学論文報告集, 第202号, pp. 33~48, 2) Zienkiewicz: Finite Element Method in Engineering Science