

鹿島建設株式会社

庄子 幹雄

"

正会員 ○松本 喬

1 ま え が き

アーチダムの震動解析は、ダムの形態や境界条件、ダムと貯水の連成系としての取扱いなどの複雑さから、これを精度高くなることは困難である。⁽¹⁾しかし、有限要素法が、構造解析だけでなく、流体力学も含めた場の問題に対しても適応できるようになり、さらに iso-parametric 要素を用いることにより、幾何学的なアーチダムの曲面的性質を要素の特性に付け加えることができるようになった。以上のことから、湛水時のアーチダムの震動解析も有限要素法を用いることにより、かなりの近似度で、その解を得ることができる。ここでは、三次元の 20 節点を有する "quadratic 要素" を用い、ダムと貯水との相互作用に着目した震動解析を行なっている。

2 基礎方程式

(1) 貯水池における基礎方程式

ダムに対する貯水の動的影響を表現するには、種々の方法があるが、ここでは、Zienkiewicz と Nath の⁽²⁾研究を書き改めて、簡単に述べる。非圧縮流体の運動方程式は、次の Navier-Stokes の式で記述でき、連続方程式は(2)式で記述される。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = K - \frac{1}{\rho} \text{grad} P + \nu \nabla^2 v \quad (1) ; \quad \text{div} v = 0 \quad (2)$$

ここで、 v は水粒子の合速度ベクトル、 K は外力の合力ベクトル、 ρ は水粒子密度、 ν は動粘性係数、 P は圧力である。貯水池は、摩擦項は微小であり、さらに地震のように激しく変化する運動に対して、慣性項も無視できるという仮定を、さらに、圧力 P は、静水圧 $\rho g z$ と動水圧 P_1 とに分離できることを、(1)、(2)式に用いれば、基礎方程式として、(3)式の Laplace 方程式を得る。(3)式を解くのに境界条件が必要であるが、アーチダムと貯水との境界のように Solid な境界では、流体の摩擦を考えなければ、境界の接線方向速度には、何の制限もないが、境界と垂直な方向の相対速度は零である。このことを式で表わせれば、(4)式となる。

$$\nabla^2 P_1 = 0 \quad (3) ; \quad \frac{\partial P_1}{\partial n} = -\rho a_n = -\rho \frac{\partial}{\partial t^2} (U_n) \quad (4)$$

ここで、 U_n は、ダムと貯水の境界表面の垂直方向変位である。一方、貯水池表面では、地震によって表面に小波が生じない場合には、圧力は 0 である。

(2) 有限要素化

流体領域での Laplace 方程式の有限要素法による定式化は、多数の研究者によって行なわれているので、ここでは、結果だけを示す。境界条件も考慮して、(5)式のように表わせる。

$$[H] \{P\} + \{F_f\} = 0 \quad (5)$$

ただし、 $H_{ij} = \sum h_{ij}^e$, $h_{ij}^e = \int_{V^e} v_e \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} dx dy dz$; $F_i = \sum F_i^e$

ここで上添字 e は代表要素を示し、 V^e は要素の体積、 N_i は、圧力分布を定義する形状関数である。さらに、 $\{F_f\}$ は、体積積分に関係するのではなく、境界の面積分によるものである。境界の動きは前述したように、ダムの動きで記述できる。つまり境界の法線方向変位は近似の形状関数を使って(6)式のように表わせ、結局(5)式は(7)式のようなになる。

$$U_n = \{\bar{N}\} \{\delta\} \quad (6) ; \quad \{F_f\} = - \int_S [N]^T \rho \{\bar{N}\} ds \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} = -[S] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} \quad (7)$$

ここで、 U_n は、法線方向変位、 δ は節点変位、 $\{\bar{N}\}$ は方向余弦で表わせる形状関数、 S は流体とダムの境界面積、 $\{N\}$ は圧力分布を定義する形状関数である。次に構造物の基礎方程式は、(8)式で示される。

$$[K]\{\delta\} + [C]\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\} + [M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} + \{F_s\} + \{R\} = 0 \quad (8)$$

ただし、外力項は流体との界面圧力による項 $\{F_s\}$ とそれ以外の外力（地震外力）とに分離している。 $\{F_s\}$ は仮想仕事の原理を用いて(9)式のように表わされる。

$$\{F_s\} = f_s \{\bar{N}\}^T PdS = f_s \{\bar{N}\} \{N\} \{P\} dS = \frac{1}{\rho} [S]^T \{P\} \quad (9)$$

以上のことから、この連成系の基礎方程式は、(5)式と(8)式の連立方程式である。

3 Iso-parametric 要素 について

アーチダムの曲面的性質を要素の性質に表わすために、三次元の iso-parametric 要素を用いた剛性マトリックス及び(5)式中の $[H]$ マトリックスについて若干の説明を行なう。Fig.1 に示す (x, y, z) に関する global な座標系を (ξ, η, ζ) の正規座標系に変換して一対一の対応をつけるために(10)式の形状関数を用いる。

$$x = \sum_{i=1}^{20} N_i X_i, \quad y = \sum_{i=1}^{20} N_i Y_i, \quad z = \sum_{i=1}^{20} N_i Z_i \quad (10)$$

ただし、 $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ は、次のように表わされるものである。

$$\text{corner nodes ; } N_i = 1/8 (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2)$$

$$\text{typical mid-side node ; } N_i = 1/4 (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0),$$

$$(\xi_i = 0, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1) \text{ etc}$$

一方、有限要素法において要素の剛性マトリックスは、次のように示される。 $[K]^e = \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz$ (11)

ここで、 $[D]$ は材料の構成則を示す行列であり、座標系には独立である。 $[B]$ は行列要素が形状関数を global な座標系で微分したもので表わされ、これを、 (ξ, η, ζ) の正規化された座標で表わすために、

Jacobian matrix $[J]$ を定義して $[B]$ を書き換える。一方、体積要素は、

(12)式で表わされるので、要素の剛性マトリックスは(13)式で表わされる。

$$dx dy dz = \det [J] d\xi d\eta d\zeta \quad (12); \quad [K]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (13)$$

(13)式を積分するのに Gauss の積分公式を用いる。また $[H]$ マトリックスについても剛性マトリックスと同様の扱いで求められる。

4 計算例 および 考察

(5)、(8)式の基礎方程式をモーダル・アナリシスを用いて動的応答を求める。解析に用いたモデルは、Fig.2 に示すもので、応答例の一つを Fig.3 に示すが詳しい結果及び考察は、ここでは省略する。

参考文献

- (1) 畑野正, 中川友康; "アーチダムの震動解析" 土木学会論文集 207号, 1972
- (2) O.C.Zienkiewicz and B.Nath; "Earthquake hydrodynamic pressure on arch dam", Proc. I.C.E., 25, 165-76, 1963
- (3) J.T.Oden et al; "Finite element applications in Fluid Dynamics" Proc. A.S.C.E., 95, EM3, 1969

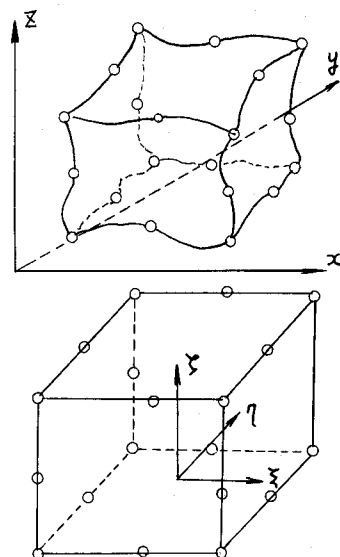


Fig.1 Isoparametric Element

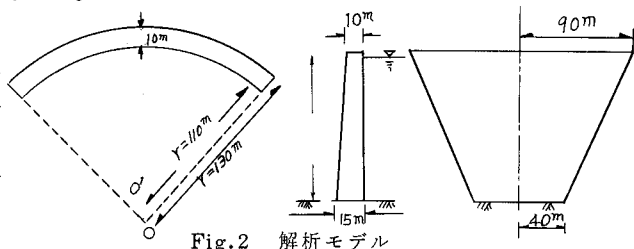


Fig.2 解析モデル

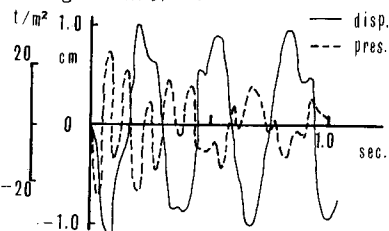


Fig.3 ダム中央部の応答と動水圧 (正弦波)