I-235

非比例減衰系の不規則振動に関する研究

京都大学　正員　山田善一
同上　同上○竹宮宏和

1. まえがき

多自由度系構造物の動的解析には、従来いわゆる比例減衰を仮定してモード解析を適用することが多い。ところが構造物と地盤の相互作用を考えた場合、減衰効果は上部工では構造減衰が主体で小さく、下部工では地盤の地下逸散減衰をも含みかなり大きいと採るのが妥当である。このような非比例減衰系の動的解析には、もはや、(古典的な)モード解析は使用できず、複素モード解析が厳密解を求める一手法となる。しかし、常に複素モード解析をすることは計算容量時間共に多くを要するから通常のモード解析を使った近似応答解析法が望まれる。本研究は、不規則外力を受ける長大つり橋タワー・ピアー系を例にとって説明したものである。

2. 応答解析法

図1に示すタワー・ピアー系モデルの運動方程式は、

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \qquad (1)$$

ここで、質量マトリックス[M]と剛性マトリックス[K]は容易に求まるが、減衰マトリックスについては

$$[C] = [C]_m^{1/2}([C]_m^{-1/2}[C]_s[C]_m^{-1/2})^{1/2}[C]_m^{1/2} \qquad (2)$$

と仮定する。ここで

$$[C]_s = \frac{2\beta_T}{\omega_1}[K] + \frac{2(\beta_p - \beta_T)}{\omega_1}\begin{bmatrix}[K]_p & [0]\\ [0] & [0]\end{bmatrix}$$

$$[C]_m = 2\beta_T\omega_1[M] + 2(\beta_p - \beta_T)\omega_1\begin{bmatrix}[M]_p & [0]\\ [0] & [0]\end{bmatrix}$$

ω_1 は系の1次固有振動数である。(2)式はタワー部、ピアー部では各モードに同一減衰を与えているが、系全体としてはいわゆる比例形とならない。

いま $\{u\} = \begin{Bmatrix}\{\dot{x}\}\\ \{x\}\end{Bmatrix}$ なる state vectorを(1)式に導入して

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = \{P\} \qquad (3)$$

を得る。ここに

$$[A] = \begin{bmatrix}[0] & [M]\\ [M] & [C]\end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix}-[M] & [0]\\ [0] & [K]\end{bmatrix} \quad \{P\} = \begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{f(t)\}\end{Bmatrix}$$

あるいは $\{\dot{u}\} = -[D]\{u\} + \{Q\}$ (4)

を得る。ここに

$$[D] = \begin{bmatrix}[M]^{-1}[C] & [M]^{-1}[K]\\ -[I] & [0]\end{bmatrix} \qquad \{Q\} = [A]^{-1}\{P\}$$

(3)式を固有値問題として把えると、その固有値は

$$|[D] - \lambda[I]| = 0 \qquad (5)$$

より、またそれに応ずる固有ベクトルから得られる固有正規直交モードマトリックス $[\Phi]$ を求めることができる。

このとき $\{u\} = [\Phi]\{r\}$ (6)

で、 $[\Phi]^T[A][\Phi] = [I]$ 　 $[\Phi]^T[B][\Phi] = [\lceil\lambda_j\rfloor]$

なる関係より(3)式は、

$$\{\dot{r}\} + [\lceil\lambda_j\rfloor]\{r\} = [\Phi]^T\{P\} \qquad (7)$$

これに後から $\{r\}^T$ を乗じた結果と(6)式の転置に前から $\{r\}$ を乗じた結果を加え合わせて期待値を取ると

$$\frac{d}{dt}[R_r] = [\lceil\lambda_j\rfloor][R_r] + [R_r][\lceil\lambda_j\rfloor] + [\Phi]^T E[\{P\}\{r\}^T] + E[\{r\}\{P\}^T][\Phi] \qquad (8)$$

ここに $[R_r]$ は応答共分散マトリックス $E[\{r\}\{r\}^T]$ であり $[R_r]$ ともとの座標での応答共分散マトリックスとの関係は

$$[R_u] = \begin{bmatrix}E[\{\dot{x}\}\{\dot{x}\}^T] & E[\{\dot{x}\}\{x\}^T]\\ E[\{x\}\{\dot{x}\}^T] & E[\{x\}\{x\}^T]\end{bmatrix} = [\Phi][R_r][\Phi]^T \qquad (9)$$

で、また

$$E[\{P\}\{r\}^T] = \int_0^t [R_p(\tau)][\Phi][\lceil e^{-\lambda_j\tau}\rfloor]\,d\tau$$

$$E[\{r\}\{P\}^T] = \int_0^t [\lceil e^{-\lambda_j\tau}\rfloor][\Phi]^T[R_p(\tau)]\,d\tau \qquad (10)$$

但し、$[R_p(\tau)] = E[\{P(t)\}\{P(t+\tau)\}^T]$ である。いま、外力を $\{f(t)\} = \{F\}\ddot{z}_0$ と考え、$\ddot{z}_0(t)$ をホワイトノイズ

$$E[\ddot{z}_0(t)\ddot{z}_0(t+\tau)] = R_{\ddot{z}_0}(\tau) = 2\pi S_0\delta(\tau) \qquad (11)$$

と仮定すると

$$\frac{d}{dt}[R_r] = [\lceil -\lambda_j\rfloor][R_r] + [R_r][\lceil -\lambda_j\rfloor] + [G] \qquad (12)$$

但し、 $[G] = S_0[\Phi][\{F\}\{F\}^T][\Phi]^T$

従って

$$[R_r] = \int_0^t [\lceil e^{-\lambda_j(t-\tau)}\rfloor][G][\lceil e^{-\lambda_j(t-\tau)}\rfloor]\,d\tau \qquad (13)$$

この積分結果は

$$[R_{ij}] = [\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}([G] - [e^{\lambda_j t}][G][e^{\lambda_j t}])_{ij}] \qquad (14)$$

定常応答状態においては $t\to\infty$ とすればよい。

次に近似応答解を求める方法について述べる。(1)式に非減衰固有モードマトリックス [V] を用いて

$$[I]\{\ddot{q}\} + [\tilde{C}]\{\dot{q}\} + [\omega_j^2]\{q\} = [V]^T\{f(t)\} \qquad (15)$$

但し $[V]^T[M][V] = [I]$, $[V]^T[K][V] = [\omega_j^2]$

$[V]^T[C][V] = [\tilde{C}]$ で、通常対角マトリックスにならない。このとき(15)式の振動数方程式は

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & \tilde{C}_{12}\lambda & \cdots & \tilde{C}_{1N}\lambda \\ C_{21}\lambda & A_2 & \cdots & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \tilde{C}_{N1}\lambda & \cdots & & A_N \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

ここに $A_j = \lambda^2 + \tilde{C}_{jj}\lambda + \omega_j^2$

これを展開すると

$$\Delta = \sum_{j=1}^{N} A_j + O(\tilde{C}^2, \lambda) \qquad (17)$$

で少なくとも $\tilde{C}_{ij}(i\neq j)$ についての2次の微小項となって現われる。全ての非対角要素 $\tilde{C}_{ij}(i\neq j)$ を無視すると

$$\lambda_j = -\beta_j\omega_j \pm i\omega_{jd} \qquad (18)$$

但し $\beta_j = \tilde{C}_{jj}/2\omega_j$ $\qquad \omega_{jd} = \sqrt{1-\beta_j^2}\,\omega_j$

一方、(16)式の厳密解は、(5)式の固有値より

$$\lambda_j = \mu_j + i\nu_j \qquad (19)$$

ここで減衰マトリックスが比例形であると $\mu_j = \beta_j\omega_j$ $\nu_j = \omega_{jd}$ となる。以下、近似減衰定数として(18)式の β_j 及び(19)式の μ_j/ν_j を用いる

応答解析は、スペクトルの入出力関係から

$$[S_x] = [\alpha][S_f][\alpha^*]^T \qquad (20)$$

ここに $[S_x]$ は応答パワー・スペクトル密度マトリックス、$[S_f]$ は外力スペクトル密度マトリックス，$[\alpha]$ は系のレセプタンスで、モードマトリックスを用いると

$$[\alpha] = [V][H][V]^T \qquad (21)$$

で表わされ、各次固有モードの周波数応答関数は

$$H_j(\omega) = \frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{1}{\{1-(\frac{\omega}{\omega_j})^2\} + i2\zeta_j\frac{\omega}{\omega_j}} \qquad (22)$$

ここに $\zeta_j = \beta_j$ あるいは μ_j/ν_j

(20)式は Wiener-Khintchine 関係式から応答共分散マトリックスを与える。(11)式のホワイト・ノイズ外力に対して変位分散は

$$\sigma_{x_\ell}^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} V_{\ell i} V_{\ell j} S_{P,ij} I_{ij} \qquad (23)$$

ここに

$$I_{ij} = \frac{4\pi(\zeta_i\omega_i + \zeta_j\omega_j) S_0}{(\omega_j^2-\omega_i^2)^2 + 4(\zeta_i\omega_i+\zeta_j\omega_j)(\zeta_i\omega_j+\zeta_j\omega_i)\omega_i\omega_j} \qquad (24)$$

$$[S_p] = [V]^T[\{F\}\{F\}^T][V]$$

また速度分散、あるいは変位－速度共分散については、(24)式をそれぞれ次式で置き換える。

$$\ddot{I}_{ij} = \frac{4\pi(\zeta_i\omega_j + \zeta_j\omega_i)\omega_i\omega_j S_0}{(\omega_i^2-\omega_j^2)^2 + 4(\zeta_i\omega_i+\zeta_j\omega_j)(\zeta_i\omega_j+\zeta_j\omega_i)\omega_i\omega_j} \qquad (25)$$

$$\dot{I}_{ij} = \frac{2\pi(\omega_i^2-\omega_j^2) S_0}{(\omega_i^2-\omega_j^2)^2 + 4(\zeta_i\omega_i+\zeta_j\omega_j)(\zeta_i\omega_j+\zeta_j\omega_i)\omega_i\omega_j} \qquad (26)$$

3．計算結果

図1の長大つり橋タワー・ピアー系を、タワー部8質点系、ピアー部2自由度系、都合10自由度系で解析した。この系はピアーのロッキング現象で、系の隣り合う固有モードが接近あるいは分離の様相を呈する。表1はこれを示したものである。図2はr.m.s.変位速度応答を、また図3は複素固有モード解析解とその近似モード解との変位についての比較を示す。

表 1.

(A) 1次モードと2次モードが接近する

$K_{BH}=K_{BV}=9$ kg/cm^3 $K_{SH}=0.5$ kg/cm^3

Modes	ω_i	ν_i	β_i	μ_i/ν_i
1	4.470	4.752	0.1409	0.2364
2	5.316	4.859	0.1439	0.0560
3	13.38	13.38	0.0211	0.0210
4	24.16	24.15	0.0205	0.0204

(B) 各次モードがよく分離する

$K_{BH}=K_{BV}=30$ kg/cm^3 $K_{SH}=0.5$ kg/cm^3

Modes	ω_i	ν_i	β_i	μ_i/ν_i
1	4.829	4.832	0.0232	0.0228
2	8.119	7.919	0.2195	0.2259
3	13.41	13.39	0.0225	0.0222
4	24.17	24.16	0.0204	0.0203

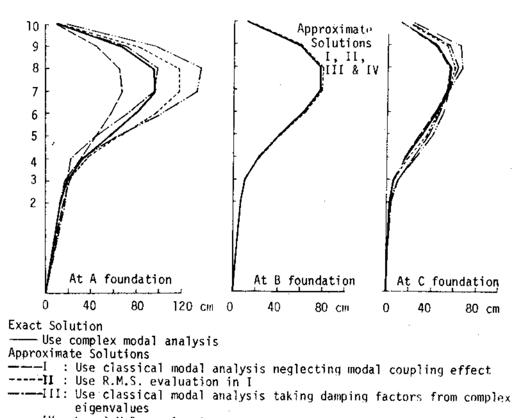

図3. rms Responses
$\beta_T= 0.02$ & $\beta_p= 0.20$

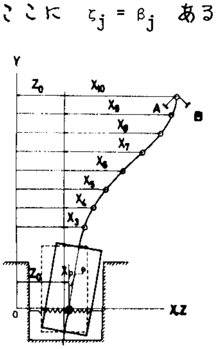

図1.System Considered

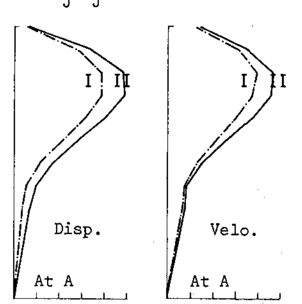

図2. rms Responses
I $\beta_T=0.02$ & $\beta_p = 0.15$
II $\beta_T=0.02$ & $\beta_p = 0.20$