I-231　差分法による粘弾性波伝播解析について

広島大学 工学部　正 員　佐藤 誠

1. はじめに

波動伝播解析の分野において，弾性問題については数値解析によって実際的な問題を解くための指針は一応確立されているようである．しかし粘弾性波伝播問題についてはいくつか試みられているが[1]，有限要素法あるいは差分法などで数値近似解を得るための重要な条件である空間分割，時間分割についての一般的，統一的な安定性の条件を示したものは見あたらないようである．

ここでは2次元粘弾性波動伝播解析を差分近似の逐次積分によって行なう場合の安定性の条件を最も簡単なVoigt 体に対して考察を行なう．

2. 波動方程式

弾性体の運動方程式は物体力を無視するとテンソル表示を用いて次式で表わせる．

$$\rho \partial_{00} u_i = (\lambda+\mu)\partial_{ji} u_j + \mu \partial_{jj} u_i . \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{1}$$

ここに ρ は密度，λ, μ はラメの定数，u_i は変位ベクトル，$\partial_0 u_i = \partial u_i/\partial t$，$\partial_j u_i = \partial u_i/\partial x_j$ である．

粘弾性体をVoigt 体と仮定すると粘性係数 λ', μ' を用いて (1) の代りに次式を得る．

$$\rho \partial_{00} u_i = \{(\lambda+\mu)+(\lambda'+\mu')\partial_0\}\partial_{ji} u_j + \{\mu+\mu'\partial_0\}\partial_{jj} u_i . \tag{2}$$

いま u_i をスカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル ψ_k で表わすと (2) は次式のとき満足される．

$$\rho \partial_{00}\varphi = \{(\lambda+2\mu)+(\lambda'+2\mu')\partial_0\}\partial_{ll}\varphi . \quad (3\cdot a), \qquad \rho\partial_{00}\psi_k = (\mu+\mu'\partial_0)\partial_{ll}\psi_k . \quad (3\cdot b)$$

ここで (3・a) を $C_1^2 = (\lambda+2\mu)/\rho$，$C_1'^2 = (\lambda'+2\mu')/\rho$ として通常の2次元表示で書くと次式となる．

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = C_1^2\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\} + C_1'^2\left\{\frac{\partial^3\varphi}{\partial t\partial x^2}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial t\partial y^2}\right\}. \tag{4}$$

3. 差分式化

(4) を逐次積分を行なうための explicit type の次式のような差分式で置き換える．

$$\varphi_{j,k}^{n+1} = 2\varphi_{j,k}^{n} - \varphi_{j,k}^{n-1} + C_1^2\{m_x^2(\varphi_{j+1,k}^{n} - 2\varphi_{j,k}^{n} + \varphi_{j-1,k}^{n}) + m_y^2(\varphi_{j,k+1}^{n} - 2\varphi_{j,k}^{n} + \varphi_{j,k-1}^{n})\}$$
$$+ C_1'^2\left\{\frac{m_x^2}{\Delta t}(\varphi_{j+1,k}^{n} - \varphi_{j+1,k}^{n-1} - 2\varphi_{j,k}^{n} + 2\varphi_{j,k}^{n-1} + \varphi_{j-1,k}^{n} - \varphi_{j-1,k}^{n-1}) + \frac{m_y^2}{\Delta t}(\varphi_{j,k+1}^{n} - \varphi_{j,k+1}^{n-1} - 2\varphi_{j,k}^{n} + 2\varphi_{j,k}^{n-1} + \varphi_{j,k-1}^{n} - \varphi_{j,k-1}^{n-1})\right\}. \tag{5}$$

ここに $m_x^2 = \Delta t^2/\Delta x^2$，$m_y^2 = \Delta t^2/\Delta y^2$，$t = n\Delta t$，$x = j\Delta x$，$y = k\Delta y$ である．

4. 安定性の条件

いま任意の実数 α, β によって $\varphi_{j,k}^{n} = \xi^n \exp i(\alpha j\Delta x + \beta k\Delta y)$ と書けるとすると (5) は次式となる．

$$\xi^{n+1} = 2\xi^n\{1-2\eta(C_1^2 + C_1'^2/\Delta t)\} - \xi^{n-1}\{1-2\eta C_1'^2/\Delta t\}. \tag{6}$$

ここに $\eta = m_x^2 \sin^2(\alpha\Delta x/2) + m_y^2\sin^2(\beta\Delta y/2)$ である．

ここで $\xi^{n+1} = \xi^n$ (i.e., $\xi^{n-1} = \xi^n$) とおくと

$\begin{Bmatrix}\xi^{n+1}\\ \xi^{n+1}\end{Bmatrix} = [G]\begin{Bmatrix}\xi^{n}\\ \xi^{n}\end{Bmatrix}$ を満足する amplification matrix $[G]$ は (6) より次式となる．

$$[G] = \begin{bmatrix} 2\{1-2\eta(C_1^2+C_1'^2/\Delta t)\} & -\{1-2\eta C_1'^2/\Delta t\} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

(7)の固有値をλ_iとするとき spectral radius を$R(\Delta t,\alpha,\beta) = |\lambda_i|_{max}$とすると von Neumann の安定性の必要条件[2]は

$$R \leqq 1 + O(\Delta t)$$

で与えられる．弾性体の場合にはこの条件は次式となる．

$$C_1^2 \Delta t^2 \left(1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2 \right) \leqq 1 . \qquad (8)$$

ここで簡単のためにVoigt体が$\lambda'/\lambda = \mu'/\mu = \tau$の最も簡単な形で表わせるとし，$\Delta x = \Delta y$，$\tau/\Delta t = r$とすると$C_1'^2 = \tau C_1^2$となるから(7)より

$$\lambda_i = \{1 - 4sC_1^2 m^2 (1+r)\} \pm \sqrt{\{1 - 4sC_1^2 m^2 (1+r)\}^2 - \{1 - 4sC_1^2 r m^2\}}$$
$$\equiv A \pm \sqrt{D}. \qquad (9)$$

ここに$s = \sin^2(\alpha \Delta x/2)$，$m^2 = m_x^2 = m_y^2$である．

1) $D \leqq 0$ のとき

すなわち $m^2 \leqq (2+r)/\{4sC_1^2(1+r)^2\}$. (10)

$0 \leqq s \leqq 1$ であるから(10)より

$$\Delta x \geqq \frac{2C_1(1+r)}{(2+r)^{1/2}} \Delta t. \qquad (\mathrm{I})$$

$|\lambda|_{max} = |\sqrt{\lambda \bar{\lambda}}|_{max} \leqq 1$ の条件を求めると次式となる

$$\Delta x \geqq \frac{2\sqrt{2} C_1 (1+r)}{(4+3r)^{1/2}} \Delta t. \qquad (\mathrm{II})$$

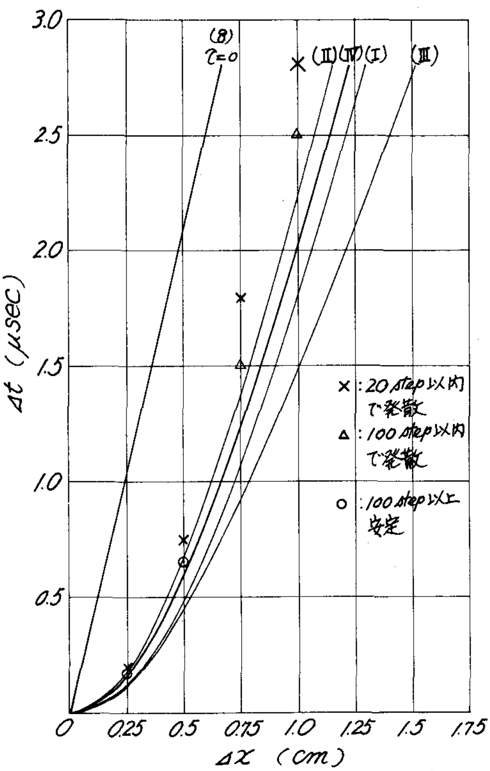
2) $D > 0$ のとき

(i) $A \geqq 0$ すなわち $\Delta x \leqq 2C_1\sqrt{1+r}\,\Delta t$，(III) のとき $R \leqq 1$ は恒等的に満足されている．

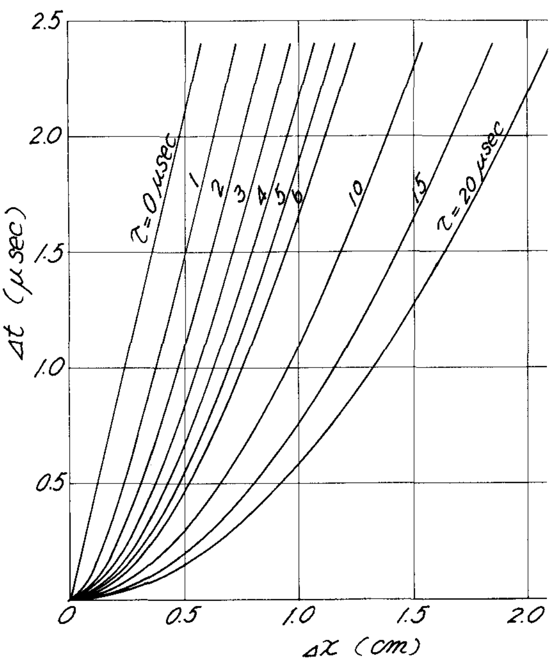
(ii) $A < 0$ のとき $R \leqq 1$ は次式となる．

$$\Delta x \geqq C_1 \sqrt{2+3r}\,\Delta t. \qquad (\mathrm{IV})$$

以上より$\Delta x_{(\mathrm{III})} > \Delta x_{(\mathrm{I})} > \Delta x_{(\mathrm{IV})} > \Delta x_{(\mathrm{II})}$であるから(5)で示される差分式に対しては安定性の必要条件は(IV)となる．この関係を高温硬化エポキシのτ=4.44 μsecに対して示したものが図－1である．この図には同じτに対してC_1=1,688 m/secの場合の数値実験の結果も示した．step数をさらに増加した場合については現在研究中である．図－2には(IV)についてτの影響を示したものである．この結果によるとτの増加に従って実際計算に用いることの多いΔxの小さい範囲ではΔtが著しく小さくなり，差分解析に不利な点が多い．なお(3-b)から同様にして求まる条件は横波に対応するものであるから(IV)で十分である．



図－1　τ=4.44 μsec, C_1=1,688 m/sec



図－2　C_1=1,688 m/sec.　(IV)

1) たとえば，W. Malon & J. Conner, "Finite Element and Dynamic Viscoelasticity," ASCE, EM4, pp. 1145～1158, (1971),

2) Lax & Richtmyer, "Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations," Comm. Pure Apll. Math. IX, pp. 267～293 (1956)