I-230　粘弾性体中を伝播する不連続面の性質

京都大学防災研究所　正　員　土岐憲三
京都大学　大学院　学生員　○佐藤忠信

1．まえがき．　不連続面の運動に関する理論は今世紀の初めに Hugoniot と Hadamard により始められたものであるが，ごく最近までは空気力学や流体力学の領域以外ではあまり注目されなかった。しかし，2次以上の不連続面を取り扱うと，非線形物体中でも wave front の運動が厳密に解析でき，非線形性を有する物体の動的挙動を知るための有効な手段となりうることが明らかになったため，この十数年間に弾性体，塑性体ならびに Fading memory を有する物体などの固体中を伝播する不連続面についての研究が行なわれるようになった。

現在まで行なわれてきた，非線形波動に関する研究手法を分類するとつぎの3つに分けることができると考えられる。（I）変形の空間ならびに時間についての2次以上の微分に不連続が生ずるような面の伝播を取り扱う手法。これは波前面の状態により波動の性状がすべて規定できる。（II）衝撃波ならびに simple wave について研究する方法。衝撃波は波前面の状態だけから波動の性状を決定することはできず（I）とは異った解析手法が必要となる。また Simple wave は空間と時間に関して滑らかな波動を取り扱うものであり，Lax の1957年の理論を用いるものである。（III）有限変形を受けている物体中の重ね合された微小平面波を考える手法。これは本質的に線形問題に帰着される。

図-1は衝撃波，加速度波，simple wave の波面（wave front）における不連続の状態を速度場を対象として示したものである。衝撃波は波面において速度に不連続が起るものであり，加速度波は速度は連続であるが加速度，ならびに速度の空間微分に不連続が発生するもので，2次のオーダの不連続面となる。一方 simple wave は速度の空間ならびに時間に関する高階微分も連続なものである。

ここでは（I）の手法により粘弾性体中を伝播する2次のオーダの不連続面を持ついわゆる加速度波について解析的な考察を加える。

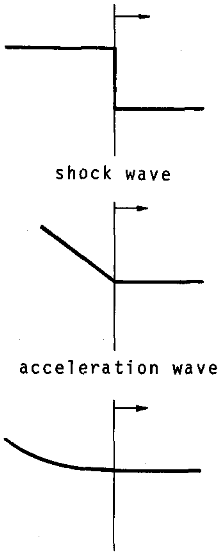

図-1 速度場を考えた場合の波面における各波動の不連続の形状

2．波動の伝播形態を支配する基礎式．　取り扱う問題を簡単にするため，波動伝播によって起る変形は1次元的なものと考えることにする。まず不連続面の運動学的性質から次式をうる。[1)]

$$-\dot{U}a\frac{dU}{dt} - U^2\frac{da}{dt} = U^2[\partial\dot{F}/\partial X] + U[\ddot{F}] \qquad (1)$$

ここに，U：不連続面の伝播速度，a：不連続面の振幅，X：不連続面の伝播する方向，x：変形，$F=\partial x/\partial X$：変形勾配，$(\dot{\ }) = Dt/Dt$ を表わしている。また任意変数 ψ の波前面の値を ψ_+，波後面の値を ψ_- とすれば $[\psi]$ は次式で与えられる。

$$[\psi] = \psi_- - \psi_+ \qquad (2)$$

積分形の運動量の釣合式の時間微分を取り，不連続面上で考えると次式をうる。

$$2\rho_0[\ddot{x}]U + [\dot{P}] = 0 \qquad (3)$$

また，運動量の釣合式を不連続面上で考えることにより式(4)を，不連続面上での力の連続性より式(5)をうる。

$$\rho_0[\ddot{x}] - [\partial P/\partial X] = 0 \qquad (4)$$

$$[P] = 0 \qquad (5)$$

構成関係として次式のものを考える。

$$P = P(F,\dot{F}) = A + B\dot{F} + C\dot{F}^2 + D\dot{F}^3 + \cdots \qquad (6)$$

ここに $A, B, C, D, \cdots\cdots$ は Fのみの関数である。式 (6) には $\dot{F}$ が入っているから，この物体は粘弾性的な挙動をすることになる。なお不連続面上で次式の関係式が与えられる。[2]

$$[\ddot{x}] = U^2 a \quad , \quad [\dot{F}] = -Ua \quad , \quad [F] = a \tag{7}$$

3. 2次の不連続面の伝播形態.　　式 (1) ～ (7) の関係を用いて，一定方向に伝わる2次の不連続面の伝播速度と振幅の表示式を求める。簡単のため不連続面の前面は均一なひずみを受けた状態で静止しているものとする。この場合次式をうる。

$$\left[\frac{\partial P}{\partial X}\right] = \frac{\partial A}{\partial F} a - \frac{\partial B}{\partial F} Ua^2 + \frac{\partial C}{\partial F} U^2 a^3 - \frac{\partial D}{\partial F} U^3 a^4 + \{B - 2CUa + 3DU^2a^2\} \left[\frac{\partial \dot{F}}{\partial X}\right] + \cdots\cdots \tag{8}$$

$$[\dot{P}] = -\frac{\partial A}{\partial F} Ua + \frac{\partial B}{\partial F} U^2 a^2 - \frac{\partial C}{\partial F} U^3 a^3 + \frac{\partial D}{\partial F} U^4 a^4 + \{B - 2CUa + 3DU^2a^2\} [\ddot{F}] + \cdots\cdots \tag{9}$$

$$[P] = -BUa + CU^2a^2 - DU^3a^3 + \cdots\cdots\cdots \tag{10}$$

式 (10) を式 (5) に代入して次式をうる。

$$Ua = 0 \qquad \text{or} \qquad Ua = \alpha_1 = \{C + \sqrt{C^2 - 4BD}\}/2D \ , \ Ua = \alpha_2 = \{C - \sqrt{C^2 - 4BD}\}/2D \tag{11}$$

式 (8) を式 (4) に代入し式 $(7)_1$，(11) を考慮すれば次式をうる。

$$[\partial \dot{F}/\partial X] = -\kappa_i U - \lambda_i \qquad (i = 1 \text{のとき } Ua = \alpha_1 \ , \ i = 2 \text{のとき } Ua = \alpha_2) \tag{12}$$

式 (9) を式 (3) に代入し式 $(7)_1$，(11) ーを考慮すれば次式をうる。

$$[\ddot{F}] = \mu_i + \xi_i a \qquad (\qquad〃 \qquad\qquad 〃 \qquad) \tag{13}$$

式 (11)，(12)　において $\kappa_i, \lambda_i, \mu_i, \xi_i$ は α_1 or α_2，A，B，$\cdots\cdots$，$\partial A/\partial F$，$\partial B/\partial F$，$\cdots\cdots$ などの複雑な関数であるが，波前面の状態が与えられると決定できる定数である。

式 (12)，(13) を式 (1) に代入すると次式をうる。

$$U\{U(\mu_i - \kappa_i) + \lambda_i + \xi_i \alpha_i\} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{14}$$

式 (14) より

$$U = 0 \quad , \quad U = -\frac{(\lambda_i + \xi_i \alpha_i)}{\mu_i - \kappa_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{15}$$

をうる。式 $(11)_1$，$(15)_1$　が成立する場合には不連続面は存在できないことになる。一方式 $(11)_{2,3}$，$(15)_2$ が成立する場合には不連続面が伝播可能であり，その場合の不連続面の大きさ（振幅）は次式で与えられる。

$$a = -\frac{(\mu_i - \kappa_i)\alpha_i}{\lambda_i + \xi_i \alpha_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{16}$$

以上式 (6) で表わされるような構成関係をもつ物体中の2次の不連続面の伝播形態についての考察を行なったが，これは弾性体中を伝わる2次の不連続面は，波前面の状態により不連続面の伝播速度が決まり，初期条件により振幅の時間的な挙動が異るという結論と比較することができよう。すなわち，構成関係に $\dot{F}$ が入ると波動の伝播速度も振幅も一義的に決まりそれ以外の解がないことから，振幅についての初期条件が式 (16) を満さないときには，不連続面は伝播しないことになる。

Gurtine による線形粘弾性体の積分形の構成式を用いれば，2次の不連続は弾性体におけるものと同様に扱いうるが，微分形の構成関係を用いると2次の不連続面は伝播できなくなるというのがこれまでの研究結果であった。ここで述べた解析結果によれば，これ以外にも解があり，微分形の構成関係をもつ粘弾性体中でも2次の不連続面が伝播しうることになる。今後3次元的な波動ならびに $\ddot{F}$，$\dddot{F}$ などの入る場合についても研究を進めていくつもりである。

---

1) 土岐憲三・佐藤忠信；2相混合体中を伝播する加速度波の性質，昭47 土木学会総合講演会概要集

2) C. Trusedell，Handbuch der Physik　III/3，1961