

武蔵工業大学土木工学科 正員 星谷 勝  
 同上 正員 〇千葉 利晃

1. 緒言 N自由度系の自由振動方程式は、一般に固有値問題の固有値および固有関数を求めることによつて解かれる。質量、バネ定数が確率量の場合には、ランダム固有値問題となるが、このランダム固有値問題のPerturbation Method による解法は文献1,2で発表した<sup>(5)</sup>。しかしながら文献2で示したように、確率量が小さい場合には、その近似解の精度もよいと思われるが、大きい値の場合には厳密解との誤差は大きくなると思われる。従つて本論文では、数値シミュレーション法により固有円振動数、およびそれに対応する変位モードの厳密解を推定し、真の値との誤差を検討した。

2. 理論解析 N自由度系の自由振動問題として図-1のような弾性剪断梁モデルを考える。自由振動方程式は、 $\ddot{M}\dot{X} + KX = 0$  で与えられるが、これは次に示す固有値問題として表わされる。

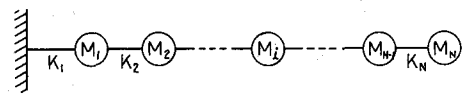


図-1 弾性剪断梁のモデル

$$\omega^2 \tilde{M} X = \tilde{K} X \quad (1)$$

ここに $\omega^2$ は固有値(自由振動の固有円振動数の2乗)、および $X$ は $\omega$ に対応する固有関数(振動モード)である。また $\tilde{M}$ は $(N \times N)$ の質量マトリックス、 $\tilde{K}$ は $(N \times N)$ の剛性マトリックスで次のように与えられる。

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_i & \\ 0 & & & & & M_N \end{bmatrix} \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & & & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -K_i & K_i+K_{i+1} & -K_{i+1} \\ 0 & & & & -K_N & K_N \end{bmatrix} \quad (2)$$

さてここで文献2に示したように次のように仮定する。

仮定1 ; 相関係数は次式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\alpha} &= E[\alpha_r \alpha_s] / \sigma_{\alpha_r} \sigma_{\alpha_s} = \exp[-A_1 |r-s|] \\ \rho_{\beta\beta} &= E[\beta_r \beta_s] / \sigma_{\beta_r} \sigma_{\beta_s} = \exp[-A_2 |r-s|] \\ \rho_{\alpha\beta} &= E[\alpha_r \beta_s] / \sigma_{\alpha_r} \sigma_{\beta_s} = B_1 \exp[-A_3 |r-s|] \end{aligned} \quad (3)$$

ここに $\sigma$ は標準偏差、 $E[\ ]$ は期待値である。  $A_1 \sim A_3$ は定数、 $B_1$ は $0 \sim 1$ の間の定数である。

仮定2 ; 確率量 $M_i$ と $K_i$ ;  $i=1, 2, \dots, N$ は確定量 $m_i$ と $k_i$ と小さな確率変動量 $\alpha_i, \beta_i$ との和で与えられるものとする。すなわち、

$$M_i = m_i + \alpha_i, \quad K_i = k_i + \beta_i \quad (4)$$

ここに $\alpha_i, \beta_i$ は平均値0で分散は小さいとする。

さて(1)式の確率量 $\alpha_i, \beta_i$ を有するマトリックス $\tilde{M}$ と $\tilde{K}$ のサンプルを数多く作り出し、各 $\tilde{M}, \tilde{K}$ 値に対応する(1)式の固有値 $\omega$ を求める。次にこの一組の $\omega$ 値の平均値および分散を求める。サンプル数が大きい場合には、この値が厳密解に近づくであろう。従つて、 $\tilde{M}, \tilde{K}$ の要素に含まれる $\alpha_i, \beta_i$ ;  $i=1, 2, \dots, N$ なる確率量を平均値0でかつ(3)式を満足するように作り出せばよいことになる。

初めに(3)式を用いて、次に示す $(2N \times 2N)$ の相互相関マトリックス $\tilde{H}$ を作る。

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} E[\alpha_r \alpha_s] & E[\alpha_r \beta_s] \\ E[\alpha_r \beta_s] & E[\beta_r \beta_s] \end{bmatrix}; \quad r, s = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

Hにおいて、対角線上の要素は $\alpha_i, \beta_i$ の分散であり、非対角線要素は互の相関を示す共分散値となっている。次に互に独立な平均値0かつ分散1の正規分布の2N個の要素より成るベクトルAを作り出す。すなわち、

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\} \quad (6)$$

次にこのAを線形変換することにより、(5)式を満足する $\alpha_i, \beta_i$ なる確率量を求めることを考える。固有値の平均および分散を求めるのが目的であるから、 $\alpha_i, \beta_i$ の確率分布関数は任意に仮定してもよい。従って、線形変換子として

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & & & 0 \\ C_{21} & C_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_{n1} & \dots & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

を考えると、 $\alpha_i, \beta_i$ は次のように表わせる。

$$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\} = \tilde{C}A \quad (8)$$

$E[B B^T] = H$ ,  $E[A A^T] =$ 単位マトリックスであるから

$$H = \tilde{C} \tilde{C}^T \quad (9)$$

従って、Hは実数の対称マトリックスであり、もし(9)式を満足する三角マトリックス $\tilde{C}$ が解ければ(8)式より $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N\}$ が求まることになる。この三角マトリックス $\tilde{C}$ は簡単に求まるので、以上考察してきたランダム固有値問題も解けることになる。三角マトリックス $\tilde{C}$ の求め方、固有値問題の解法についての参考文献としては、例えば(3)、(4)等がある。

**3. 数値計算例** 4自由度系弾性剪断梁の自由振動を例題として計算を行った。確定量である質量、バネ定数は表-1に示すように、 $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1.0$  および  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1.0$  とし、標準偏差は確定量  $m_i, k_i$  の1%とした。また(3)式中の係数は  $A_1 = A_2 = A_3 = 2.0$ ,  $B_1 = 0.8$  として計算を行った。固有値は Power method<sup>(4)</sup>を利用して求め、シミュレーションによる繰返し回数は101回とした。結果である固有円振動数の平均値、その標準偏差、および変動係数を表-2に、固有ベクトルの平均値(変位モード)を表-3に示す。Power methodは高次モードより順次求めてゆくの、モードの高くなるにつれて、丸めによる計算誤差を多少受けているかもしれない。

さて、表2~3の固有円振動数 $\omega$ は、あくまでも101個の標本平均であるので、以下信頼区間を求め固有円振動数の母集団の平均値を推定することを考える。

共に未知の平均 $\mu$ と分散 $\sigma^2$ をもつ正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  から抽出した大きさ  $n$  の標本の平均と分散をそれぞれ  $\bar{x}$ ,  $S^2$  で表わせば、 $\mu$  に対する  $100(1-\alpha)\%$  信頼区間は

$$\left[ \bar{x} \pm t_{\alpha/2; n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \quad (10)$$

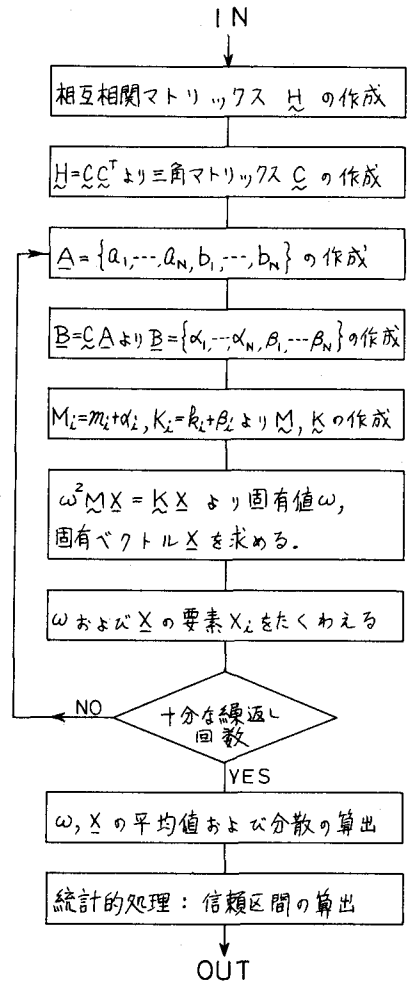


図-2. ランダム固有値問題の数値シミュレーション

表-1 剪断梁モデルのデータ

i	Mass		Spring	
	$m_i$	$\sigma_{\alpha_i}$	$k_i$	$\sigma_{\beta_i}$
1	1.0	0.01	1.0	0.01
2	1.0	0.01	1.0	0.01
3	1.0	0.01	1.0	0.01
4	1.0	0.01	1.0	0.01

$$A_1 = A_2 = A_3 = 2.0, \quad B_1 = 0.8$$

であり、 $\sigma$ に対する $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間は

$$\left[ S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}}, S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}} \right] \quad (11)$$

である。ここに $\chi^2_{\alpha/2;n-1}$ ,  $\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}$ はそれぞれ自由度 $n-1$ のステューデント $t$ 分布, カイ2乗分布である。標本を取り出すべき母集団が未知の平均と分散をもっているが, 正規とはいえない場合でも, 実用的には(10), (11)式を $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間の近似値として採用して十分である。従ってここで求めた固有円振動数 $\omega$ と固有ベクトル $X$ が正規分布に従うとして, 以下計算を行なう。(10), (11)式を用いて求めた固有振動数, 標準偏差および変位モードの99%信頼区間を表4~6に示す。表4, 5により判るように, 固有円振動数および変位モードに対する信頼区間は, 非常に小さく101回の繰返し数によって求めた固有円振動数, 変位モードをもって, 真の値として十分であろう。なお図-3に変位モードを図示しておく。今回行った計算は確率変動量が小さく, 確定量の場合(省略)と大差はなかった。

確率変動量が大きくなった場合の解析, シミュレーション繰返し回数の検討, およびPerturbation methodとの比較検討は後にゆずる。減衰振動(ランダム固有値問題)の場合の解析が今後の課題であろう。

参考文献

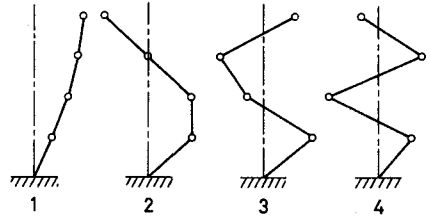
- (1) Hoshiya, M., Conf. on Applications of Stat. & Prob. to Soil & Struct. Engr., Hong Kong, 1971, pp.538
- (2) 星谷勝, 土木学会が27回年次学術講演会講演概要集, 1972, pp.538
- (3) Ketter & Prawel, "Modern Methods of Engineering Computation," McGraw-Hill
- (4) Carnahan, Luther & Wilkes, "Applied Numerical Methods," John-Wiley & Sons.
- (5) 星谷勝, "確率論手法による構造解析" 鹿島出版会

表-2 固有円振動数, 標準偏差 $S$ , 変動係数 $\nu$

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
E[ $\omega$ ]	0.3473	1.0005	1.5319	1.8801
S ( $\times 10^{-3}$ )	1.9531	4.1432	5.9402	4.3673
$\nu (\times 10^{-3})$	5.6240	4.1411	3.8777	2.3229

表-3 固有ベクトル(変位モード)

i	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
1	0.2281	0.5777	0.6576	0.4304
2	0.4286	0.5770	-0.2262	-0.6582
3	0.5774	0.0003	-0.5773	0.5745
4	0.6564	-0.5773	0.4276	-0.2262



Mode: 1 2 3 4

図-3 変位モード

表-4 99%信頼区間(固有円振動数, 標準偏差)

	Mode 1		Mode 2		Mode 3		Mode 4	
	L.B.	U.B.	L.B.	U.B.	L.B.	U.B.	L.B.	U.B.
$\mu$	0.347	0.348	0.999	1.002	1.530	1.533	1.879	1.881
$\sigma (\times 10^{-3})$	1.393	2.901	2.956	6.154	4.238	8.823	3.116	6.487

L.B., U.B. : Lower(Upper) Bound

表-5 99%信頼区間(固有ベクトル)

i	Mode 1		Mode 2		Mode 3		Mode 4	
	L.B.	U.B.	L.B.	U.B.	L.B.	U.B.	L.B.	U.B.
1	0.227	0.229	0.576	0.579	0.657	0.658	0.427	0.433
2	0.428	0.430	0.576	0.578	-0.229	-0.223	-0.660	-0.656
3	0.576	0.578	-0.001	0.002	-0.579	-0.575	0.572	0.577
4	0.655	0.657	-0.579	-0.575	0.426	0.429	-0.228	-0.225

表-6 99%信頼区間(固有ベクトルの標準偏差) ( $\times 10^{-3}$ )

i	Mode 1		Mode 2		Mode 3		Mode 4	
	L.B.	U.B.	L.B.	U.B.	L.B.	U.B.	L.B.	U.B.
1	1.365	2.842	2.613	5.439	2.607	5.427	7.205	15.00
2	1.426	2.968	2.337	4.865	7.596	15.81	4.252	8.853
3	1.155	2.405	2.865	5.965	3.780	7.870	5.761	11.99
4	1.338	2.785	3.612	7.519	3.216	6.696	3.090	6.432