I-227 ブラウン運動をする振動子の確率論的性質について

川崎製鉄株式会社　正会員　石田昌弘

1. まえがき

1次元調和振動を行なっている粒子にランダムな外力を加えた場合，この粒子の運動は一般にブラウン運動と言われ，この運動に対して成立するFokker－Plankの方程式の解法について，特に場の力が強くて，粒子が振動する場合の解を与えて，その解にS.O.Riceの公式を応用して，問題となる粒子の位置を平面（出発点からの距離xおよび時刻t）で示したとするときのFirst－Passage Problemについて検討することを目的とする。

2. 1次元調和振動子のブラウン運動の解法

問題となる振動子の運動に対する変数を，x；位置，u；速さ，t；時刻，x_0；初期位置，u_0；初速度　としておくと，振動子が位相平面（x，u）において，時刻tのとき位置がxで，速度がuである確率を$W(x,u,t;x_0,u_0)dxdu$と記述するとき，このWを支配する方程式は，次式のようにいわゆるFokker－Plankの方程式として与えられる。

$$\frac{\partial W}{\partial t}+u\frac{\partial W}{\partial x}-\omega^2 x\frac{\partial W}{\partial u}-\beta u\frac{\partial W}{\partial u}=\beta W+q\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \qquad \text{―――― (1)}$$

$$\beta=\frac{6\pi a\mu}{m}\ ,\quad q=\frac{\beta kT}{m}$$

ここに，μ；周囲流体の粘性係数，m；振動子の質量，a；振動子を球としたときの半径

T；温度，k；Boltzmann定数，u；振動子の振動周波数

式(1)のtを$\frac{t}{\beta^{-1}}$，xを$x/(\frac{q}{\beta^3})^{1/2}$なる形で書き直すと次式のようになる。

$$\frac{\partial W}{\partial t}+u\frac{\partial W}{\partial x}-\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 x\frac{\partial W}{\partial u}-u\frac{\partial W}{\partial u}=W+\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \qquad \text{―――― (2)}$$

いま，振動子の固有周期をT_0とすれば，$\frac{\omega}{\beta}=\frac{2\pi}{\beta T_0}$が成立し，これを$\lambda$とおくと，式(2)の右辺第2項を除いた線形1階偏微分方程式は，次式であらわされる。

$$\frac{\partial W}{\partial t}+u\frac{\partial W}{\partial x}-\lambda^2 x\frac{\partial W}{\partial u}=W+u\frac{\partial W}{\partial u} \qquad \text{―――― (3)}$$

式（3）を次式に示す補助微分方程式から，独立な2個の第1積分を求める。

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{u}=\frac{du}{-(\lambda^2 x+u)} \qquad \text{―――― (4)}$$

すなわち，式(4)より

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}+\lambda^2 u=0 \qquad \text{―――― (5)}$$

式(5)が得られる。ここで，$u=e^{\mu t}$とおくと，式(5)の一般解は，次式としてあらわされる。

$$u=c_1 e^{\mu_1 t}+c_2 e^{\mu_2 t} \qquad \text{―――― (6)}$$

現在問題としているのは，場の力が強くて振動する場合であるから，$1-4\lambda^2<0$，すなわち$\lambda>1/2$のときである。結局式(6)は，次式のようになる。

$$u=e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right) \qquad \text{―――― (7)}$$

ゆえに求める第1積分は，次式のようになる。

$$\begin{aligned}\xi&=\frac{e^{\frac{1}{2}t}}{\omega_1}\left[u\left(\frac{1}{2}\sin\omega_1 t+\omega_1\cos\omega_1 t\right)+\lambda^2 x\sin\omega_1 t\right]\\ \eta&=\frac{e^{\frac{1}{2}t}}{\omega_1}\left[u\left(-\frac{1}{2}\cos\omega_1 t+\omega_1\sin\omega_1 t\right)-\lambda^2 x\cos\omega_1 t\right]\end{aligned} \qquad \text{―――― (8)}$$

上式を式(2)に適用する。すなわち

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial u}&=\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}=\frac{e^{1/2t}}{\omega_1}\left[\left(\frac{1}{2}\sin\omega_1 t+\omega_1\cos\omega_1 t\right)\frac{\partial W}{\partial \xi}+\left(-\frac{1}{2}\cos\omega_1 t+\omega_1\sin\omega_1 t\right)\frac{\partial W}{\partial \eta}\right]\\ \frac{\partial W}{\partial x}&=\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\lambda^2 e^{1/2t}}{\omega_1}\left[\frac{\partial W}{\partial \xi}\sin\omega_1 t-\frac{\partial W}{\partial \eta}\cos\omega_1 t\right] \qquad \text{―――― (9)}\\ \frac{\partial^2 W}{\partial u^2}&=\frac{e^{t}}{\omega_1^2}\left[\left(\frac{1}{2}\sin\omega_1 t+\omega_1\cos\omega_1 t\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\left(-\frac{1}{2}\cos\omega_1 t+\omega_1\sin\omega_1 t\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}+2\left(\frac{1}{2}\sin\omega_1 t+\omega_1\cos\omega_1 t\right)\left(-\frac{1}{2}\cos\omega_1 t+\omega_1\sin\omega_1 t\right)\frac{\partial^2 W}{\partial \xi\cdot\partial \eta}\right.\end{aligned}$$

以上の結果を整理すると次式となる。

$$\frac{\partial W}{\partial t}=W+\frac{e^t}{\omega_1^2}\left[\left(\frac{1}{2}\sin\omega_1 t+\omega_1\cos\omega_1 t\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\left(-\frac{1}{2}\cos\omega_1 t+\omega_1\sin\omega_1 t\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}+2\left(\frac{1}{2}\sin\omega_1 t+\omega_1\cos\omega_1 t\right)\left(-\frac{1}{2}\cos\omega_1 t+\omega_1\sin\omega_1 t\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta}\right] \quad (10)$$

ここで，$W=\chi e^t$ とおくと，次式がえられる。

$$\frac{\partial W}{\partial t}=W+\frac{\partial \chi}{\partial t}e^t,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}=\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2}e^t,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2 \chi}{\partial\xi\partial\eta}e^t,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}=\frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2}e^t \quad \text{———} (11)$$

以上を整理すると，結局式(10) は，次式のようになる。

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}=\psi^2\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}+2\psi\phi\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi\partial\eta}+\phi^2\frac{\partial^2\chi}{\partial\eta^2} \quad \text{———} (12)$$

ここで，$\psi=\frac{1}{\omega_1}\left(\frac{1}{2}\sin\omega_1 t+\omega_1\cos\omega_1 t\right)e^{\frac{t}{2}}$， $\phi=\frac{1}{\omega_1}\left(-\frac{1}{2}\cos\omega_1 t+\omega_1\sin\omega_1 t\right)e^{\frac{t}{2}}$

結局，式(12) の解は，次のようになる。

$$\chi=\frac{M}{2\pi\Delta^{1/2}}\exp\left[-\left\{a(\xi-\xi_0)^2+2h(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)+b(\eta-\eta_0)^2\right\}/2\Delta\right] \quad \text{———} (13)$$

ここで，$\xi_0=\xi|_{t=0}$，$\eta_0=\eta|_{t=0}$，$a=2\int_0^t\psi^2dt$，$b=\int_0^t\phi^2dt$，$h=-2\int_0^t\psi\phi\, dt$，$\Delta=ab-h^2$，M;定数

ゆえに，

$$W=\frac{Me^t}{2\pi\Delta^{1/2}}\exp\left[-\left\{a(\xi-\xi_0)^2+2h(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)+b(\eta-\eta_0)^2\right\}/2\Delta\right] \quad \text{———} (14)$$

なお，MはWが確率密度であることから決定されなければならない。すなわち，次式を満足する。

$$\iint_{全領域}W(x,u;x_0,u_0)\,dx\,du=\iint_{全領域}W(\xi,\eta,t;\xi_0,\eta_0)\frac{\partial(x,u)}{\partial(\xi,\eta)}d\xi\, d\eta=1$$

上式から，$M=\frac{\lambda^2}{\omega_1}$ がえられる。ゆえに求めるW(x, u, t ; x_0, u_0) dxdu は，次式としてあらわされる。

$$W(x,u,t;x_0,u_0)=\frac{\lambda^2}{\omega_1}\frac{e^t}{2\pi\Delta^{1/2}}\exp\left[-\left\{a(\xi-\xi_0)^2+2h(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)+b(\eta-\eta_0)^2\right\}/2\Delta\right] \quad \text{———} (15)$$

ここに，

$$a=\frac{2}{\omega_1^2}\left[\left(\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{4}\omega_1\sin 2\omega_1 t-\frac{1}{8}\cos 2\omega_1 t\right)e^t-\frac{1}{8}(4\lambda^2-1)\right]$$

$$b=\frac{2}{\omega_1^2}\left[\left(\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{4}\omega_1\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{8}\cos 2\omega_1 t\right)e^t-\frac{1}{8}(4\lambda^2+1)\right]$$

$$h=\frac{2}{\omega_1^2}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\omega_1\cos 2\omega_1 t\right)e^t-\frac{1}{4}\omega_1\right]$$

$$\Delta=\lambda^2\left(\lambda^2-\frac{1}{4}\right)(e^t-1)^2$$

$$\xi_0=u_0,\quad \eta_0=-\frac{1}{\omega_1}\left(\frac{1}{2}u_0+\lambda^2x_0\right)$$

3. S. O. Rice の公式の応用

ここでは，問題となる振動子が時刻 $t=0$ で $x=0$, $u=u_0$ の初期値をもって出発したとき，時間(t, t+dt)の間で $u\geq 0$ であって $x=d$ となる回数を求める。時刻(t, t+dt)の間で，正の傾きをもって $x=d$ となる回数を ν_d^+ とあらわすとS. O. Rice の公式から，次式が成立する。

$$\nu_d^+(t,u_0)=\int_0^\infty W(d,u,t;0,u_0)\,u\,du \quad \text{———} (16)$$

ここで，

$$R=\frac{e^{\frac{1}{2}t}}{\omega_1}\lambda^2 d\sin\omega_1 t,\quad Q=\frac{e^{\frac{1}{2}t}}{\omega_1}\lambda^2 d\cos\omega_1 t,\quad A=\alpha k^2+2\gamma kl+\beta l^2$$

$$B=(\alpha k+\gamma mk+\gamma l+\beta ml)u_0+(-k\alpha R+\gamma kQ-\gamma Rl+\beta lQ)$$

$$C=(\alpha+2\gamma m+\beta m^2)u_0^2+(-2\alpha R-2\gamma Rm+2\gamma Q+2\beta mQ)u_0+(\alpha k^2-2\gamma RQ+\beta R^2)$$

とおくとき，式(16)は次式のようになる。

$$\nu_d^+(t,u_0)=\frac{\lambda^2}{\omega_1}\frac{e^t}{2\pi\Delta^{1/2}}e^{-C}\int_0^\infty\exp(-Au^2+2Bu)\,u\,du$$

$$=\frac{\lambda^2}{\omega_1}\frac{e^t}{2\pi\Delta^{1/2}}e^{-C}\frac{1}{A}\left[\frac{1}{2}+e^{\frac{B^2}{A}}\frac{B}{\sqrt{A}}\sqrt{\pi}\left\{1-\Phi\left[\sqrt{2}\left(-\frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right]\right\}\right] \quad \text{———} (17)$$

ここで，$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ である。

つぎに，時刻 $t=0$ で，$x=0$, $u=u_0$ をもって出発し，時刻 t ではじめて再び正の傾きをもって $x=d$ なる点を切る確率を求める。その確率を $w(t,u_0)\,dt$ とするとき，次式が成立する。

$$w(t,u_0)\,dt=\left(1-\int_0^t w(t,u_0)\,dt\right)\cdot\nu_d^+(t,u_0)\,dt \quad \text{———} (18)$$

結局，求める確率 w は，次式の形となる。

$$w(t,u_0)=\nu_d^+(t,u_0)\cdot\exp\left[-\int_0^t\nu_d^+(t,u_0)\,dt\right] \quad \text{———} (19)$$

式(18)，式(19) の中の $\nu_d^+(t,u_0)$ は，式(17)であらわされるもの。計算結果については講演時にゆずる。