

1. はじめに

はりの曲げ振動の解析において、せん断変形と回転慣性を考慮しない場合には、その解は短波長の波は伝播速度が無限大となり発散現象を呈してしまうという欠陥をもつため、衝撃的攪乱に対する動的応答計算のように、*Time delay* が意味をもつような問題には満足な解が得られないことは周知のとおりである。すなわち、このように振動波の伝播という観点からの解析を必要とする問題、あるいはずんぐりしたはりを対象とした振動問題に対しては、せん断変形と回転慣性をともに考慮したいわゆる“*Timoshenko Beam*”としての取り扱いが要求される。

このことは薄肉断面のはりの曲げねじれ振動にもあてはまり、断面の反り拘束にとまなう曲げねじれ変形に対してせん断変形と回転慣性を考慮した解析が必要なる場合が考えられる。*Aggarwal* と *Cranck* は I 断面と C 断面のはりの曲げねじれ振動の解析に上記の *Timoshenko Beam Theory* の拡張を行ない、振動波長と *Phase Velocity* との関係性を求め、短波長の波動はたわみ振動の場合と同様にいくつかの波列が一定速度で伝播していくことを示した¹⁾ (図-4 参照)。

著者は任意形状の薄肉多角断面ばりの曲げねじれ振動について、断面の反り拘束にとまなう曲げねじれ変形に対してせん断変形と回転慣性を考慮した解析の手法を見出し、その波動解析が一般的に可能であることを明らかにした。その概略について報告する。

2. 構成要素としての板帯のポテンシャルエネルギー

n 本の板帯から成る薄肉多角断面ばりを扱うこととし、まずその曲げねじれ振動における任意の板帯 (以下 *j*-plate) の歪エネルギー V_j と運動エネルギー K_j を計算する (記号については図-1 参照)。 *j*-plate の断面の中立点 O_j の x 、 y 、 z 軸方向の変位成分をそれぞれ u_j 、 v_j 、 w_j とし、 η_j 軸まわりの断面の回転角を ψ_j とする。このとき *j*-plate の任意点 ξ_j の z 軸方向の歪歪 ϵ_z および O_j 点のせん断歪 $\delta_{\xi z}$ は次式で表わされる;

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\partial w_j}{\partial z} - \xi_j \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \\ \delta_{\xi z} &= \frac{\partial u_j}{\partial z} \cos \alpha_j + \frac{\partial v_j}{\partial z} \sin \alpha_j - \psi_j \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

したがって、*j*-plate の歪エネルギー V_j は

$$V_j = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ E F_j \left(\frac{\partial w_j}{\partial z} \right)^2 + E J_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right)^2 + G J_{Tj} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right)^2 + G K_j F_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial z} \cos \alpha_j + \frac{\partial v_j}{\partial z} \sin \alpha_j - \psi_j \right)^2 \right\} dz \quad (2)$$

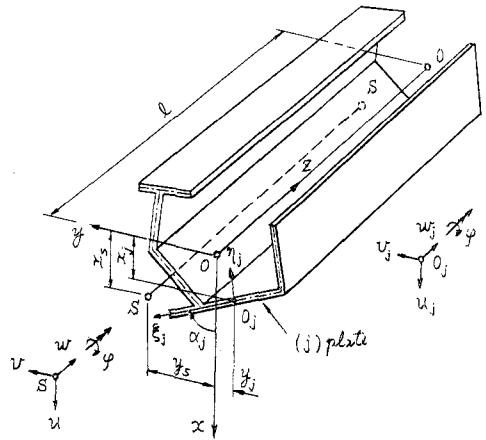


図-1 薄肉多角断面材の一般図

ここに、 F_j : *j*-plate の断面積、 J_j : *j*-plate の断面の η_j 軸まわりの断面二次モーメント、 K_j : *j*-plate の断面の ξ_j 軸方向のせん断係数、 J_{Tj} : *j*-plate の *St. Venant* のねじり定数。

一方、*j*-plate の運動エネルギー K_j は次式で表わされる;

$$K_j = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left\{ F_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + F_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} \right)^2 + I_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right)^2 + J_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right)^2 \right\} dz \quad (3)$$

ここに、 ρ : 材料の密度、 I_j : *j*-plate の断面の極慣性モーメント。

3. はり全体のポテンシャルエネルギー

はりのせん断中心 \$S\$ の \$x, y\$ 軸方向の変位および断面のねじれ角をそれぞれ \$u, v\$ および \$\varphi\$ とし、断面の中点 \$O\$ を原点とする座標系 \$(0-x, y)\$ における \$O_j\$ 点および \$S\$ 点の座標をそれぞれ \$(x_j, y_j)\$ および \$(x_s, y_s)\$ とすると \$u_j \equiv u - (y_j - y_s)\varphi\$, \$v_j \equiv v + (x - x_s)\varphi\$ と書けるから、はり全体の歪エネルギー \$V\$ および運動エネルギー \$K\$ は、式(2), (3)よりそれぞれ次のように求まる;

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{j=1}^n \left\{ EF_j \left(\frac{\partial w_j}{\partial z} \right)^2 + EJ_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right)^2 + GJ_T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + GJ_j F_j \left(\frac{\partial u}{\partial z} \cos \alpha_j + \frac{\partial v}{\partial z} \sin \alpha_j + \varphi \right)^2 \right\} dz \\ K &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left\{ F \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + F \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + 2Fy_s \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2Fx_s \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + I_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \sum_{j=1}^n J_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right)^2 \right\} dz \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

こゝに、\$f_j = (x_j - x_s) \sin \alpha_j - (y_j - y_s) \cos \alpha_j\$: \$S\$ 点から \$f_j\$ 軸におろした垂線の長さ、\$F = \sum_{j=1}^n F_j\$: はりの全断面積、\$J_T = \sum_{j=1}^n J_{Tj}\$: はりの St. Venant のねじり定数、\$I_s = \sum_{j=1}^n \{ J_j (x_j - x_s)^2 + F_j (y_j - y_s)^2 + I_{Tj} \}\$: \$S\$ 点に関するはり断面の極慣性モーメント。また \$\partial w_j / \partial z\$ は各板帯の接合点における \$z\$ 軸方向の垂直歪

の連続条件; $\frac{\partial w_j}{\partial z} - \frac{\partial w_{j+1}}{\partial z} = a_j \frac{\partial \psi_j}{\partial z} + a'_{j+1} \frac{\partial \psi_{j+1}}{\partial z}$; \$j=1, 2, \dots, n\$... (5)

ならびに、断面の \$z\$ 軸方向の垂直応力のつりあい条件;

$$\sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial w_j}{\partial z} = 0 \dots (6)$$

よつてつぎのように \$\psi_j\$ (\$j=1, 2, \dots, n\$) で表わすことができる;

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_j}{\partial z} &= \frac{1}{F} \sum_{m=2}^n \sum_{i=2}^m F_m (a_{i-1} \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial z} + a'_i \frac{\partial \psi_i}{\partial z}) \\ \frac{\partial w_j}{\partial z} &= \frac{\partial w_j}{\partial z} - \sum_{i=2}^j (a_{i-1} \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial z} + a'_i \frac{\partial \psi_i}{\partial z}); j=2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

はりの全ポテンシャルエネルギー (\$V+K\$) を知れば \$\delta(V+K) = 0\$ より変分問題のオイラーの微分方程式として、せん断変形および回転慣性を考慮した曲げねじれ振動に対する \$u, v, \varphi, \psi_j\$ (\$j=1, 2, \dots, n\$) に関する基礎方程式が得られる。

4. 具体的断面に関する解析例 —— [形断面の場合

図-3 に示すような [形断面のはりの曲げねじれ振動に対して、上記の解法を適用してみる。\$n=3\$, \$F_1 = F_3 = F_f\$, \$F_2 = F_w\$, \$J_1 = J_3 = J_f\$, \$J_2 = J_w\$, \$K_1 = K_3 = K_f\$, \$K_2 = K_w\$ とおき、さらに曲げねじれに対しては \$\psi_1 = \psi_3 = \psi_f\$, \$\psi_2 = \psi_w\$ とおける。

まず、式(7)より $\frac{\partial w_1}{\partial z} = -\frac{\partial w_3}{\partial z} = \frac{b}{2} \frac{\partial \psi_f}{\partial z} + \frac{h}{2} \frac{\partial \psi_w}{\partial z}$, \$w_2 = 0\$ (8)

さらに断面の幾何学的条件を考慮して、結局この場合の \$V\$ および \$K\$ は

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{3}{2} EF_f b^2 \left(\frac{\partial \psi_f}{\partial z} \right)^2 + E \left(F_f \frac{h^2}{2} + J_w \right) \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial z} \right)^2 + EF_f b h \frac{\partial \psi_f}{\partial z} \frac{\partial \psi_w}{\partial z} + 2GF_f F_f (\psi_f^2 - h \psi_f \frac{\partial \varphi}{\partial z}) + GF_w F_w \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \psi_w^2 + 2e \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - 2\psi_w \frac{\partial u}{\partial z} - 2e \psi_w \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (K_f F_f \frac{h^2}{2} + K_w F_w e^2 + J_T) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] dz \dots (9)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left[F \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 2Fy_s \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + I_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + 2J_f \left(\frac{\partial \psi_f}{\partial t} \right)^2 + J_w \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial t} \right)^2 \right] dz \dots (10)$$

こゝで、\$\delta(V+K) = 0\$ より導かれる \$u, \varphi, \psi_f, \psi_w\$ に関する3連偏微分方程式は Aggarwal & Cranch の式¹⁾と一致する。図-4 はこの微分方程式に基づく解析の結果得られた自由振動の Phase Velocity と波長との関係を示す(ただし、\$b/h = 1/4\$, \$t/h = tw/h = 1/25\$ の場合)。

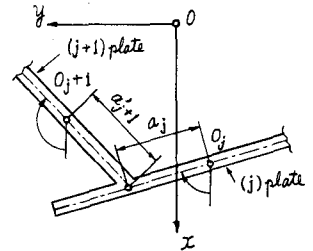


図-2 (j) plate と (j+1) plate の接合点

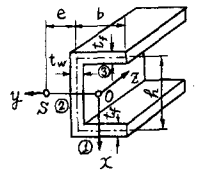


図-3 [形断面材

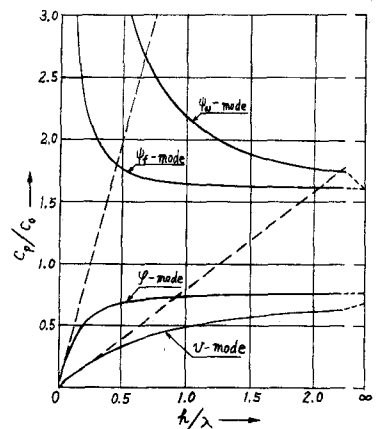


図-4 [形断面はりの曲げねじれ振動波の Phase Velocity

文献 1) Aggarwal, H.R. & E.T. Cranch: Journal of Applied Mechanics, June 1967

2) 深沢希晴: 第29回土木学会学術講演会講演概要集, 第I部 (pp.533) 昭和47年10月