I-219 衝撃荷重を受けるはりの非線形振動

長崎大学工学部 正員 ○高橋和雄
九州大学工学部 正員 樗木 武

1．緒言 スパンが固定されるはりの過渡応答においては，応答振幅に依存する軸方向力の影響を受けることが容易に推定され，その現象を把握することが望まれている。しかし，本題では運動方程式に非線形項が含まれるため自由振動の項と強制振動の項とを重ね合せる通常の方法により解析することが困難である。このため本問題に関する研究はきわめて少ない[1]。著者らは先にガラーキン法を用いて一径間ばりを一自由度系と仮定のうえ，えられた時間に関する非線形常微分方程式を摂動法およびルンゲ・クッタ・ジル法を併用することによって解き，応答に及ぼす非線形項の影響を検討した[2]。しかし，一径間ばりを一自由度系に仮定することは場合によっては無理があることも十分考えられ，従って全ての一径間ばりに本法を適用することは疑問である。そこで，本論文では，この方法による解がどの程度正しいものであるかについて一応の検討を加えるために差分法の陽公式による解法を提案のうえ，これを用いて著者らの前論文の妥当性を吟味するものである。

2．解法 細長比の大きなはりを対象とすれば，変形の影響を無視することができ，本題の運動方程式が次のように与えられる。

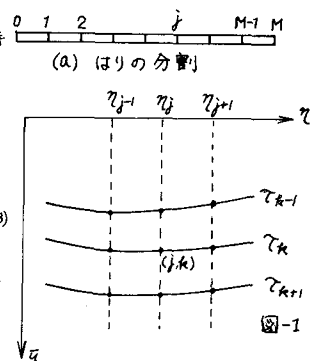
$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p f(x,t) \quad (1) \qquad \frac{P}{EA} = \frac{P_0}{EA} - \frac{1}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \quad (2)$$

ここに，x；はりのスパン方向に沿う座標，t；時間，y；はりのたわみ，l；スパン，E；弾性係数，I；断面2次モーメント，A；断面積，ρ；密度，P；軸力，P_0；初期軸力，$f(t)$；外力の時間関数，p；荷重強度
式(1)および式(2)を無次元化すれば次のように書き改められる。

$$\frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \eta^4} + N g_{cr}^2 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \tau^2} = \frac{p l^4}{EIr} f\left(\lambda^2 \frac{\tau}{\omega}\right) \quad (3) \qquad N = N_0 - \frac{1}{2g_{cr}^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta}\right)^2 d\eta \quad (4)$$

ここに，$\bar{y} = y/r$，$\eta = x/l$，$\tau = \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}\, t$，$N = P/P_{cr}$，$N_0 = P_0/P_{cr}$，$g_{cr} = \sqrt{\frac{P_{cr} l^2}{EI}}$，$r$；断面2次半径，$P_{cr}$；オイラーの座屈荷重，$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho A l^4 \omega^2}{EI}}$，$\omega$；固有円振動数

いま，図-1に示すようにはりを等間隔にM個に分割し，分割長さを$\Delta\eta$とし，時間きざみを$\Delta\tau$とすれば，任意の時間τ_kにおけるはりの分割点jにおける式(3)および式(4)に含まれる導関数が次のように差分法の陽公式を用いて表わされる。



(a) はりの分割
(b) $\tau_{k-1}, \tau_k, \tau_{k+1}$における変位状態
図-1

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \tau^2}\right)_{j,k} = \frac{\bar{y}_{j,k+1} - 2\bar{y}_{j,k} + \bar{y}_{j,k-1}}{(\Delta\tau)^2} \quad (5) \qquad \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta}\right)_{j,k} = \frac{\bar{y}_{j+1,k} - \bar{y}_{j-1,k}}{2\Delta\eta} \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \eta^2}\right)_{j,k} = \frac{\bar{y}_{j+1,k} - 2\bar{y}_{j,k} + \bar{y}_{j-1,k}}{(\Delta\eta)^2} \quad (7) \qquad \left(\frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \eta^4}\right)_{j,k} = \frac{\bar{y}_{j+2,k} - 4\bar{y}_{j+1,k} + 6\bar{y}_{j,k} - 4\bar{y}_{j-1,k} + \bar{y}_{j-2,k}}{(\Delta\eta)^4} \quad (8)$$

また，式(4)の右辺は定積分の項が含まれるために，シンプソンの第1公式を用いて代数式になおせば次のとおりである。

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta}\right)^2 d\eta = \frac{\Delta\eta}{3}\left\{(\bar{y}_{1,k} - \bar{y}_{-1,k})^2 + 4\sum_{n=2,4}^{M}(\bar{y}_{n,k} - \bar{y}_{n-2,k})^2 + 2\sum_{n=3,5}^{M-1}(\bar{y}_{n,k} - \bar{y}_{n-2,k})^2 + (\bar{y}_{M+1,k} - \bar{y}_{M-1,k})^2\right\} \quad (9)$$

式(4)を式(3)に代入のうえ，式(5)～(9)を用いれば，次の結果を得る。

$$\bar{y}_{j,k+1} = 2\bar{y}_{j,k} - \bar{y}_{j,k-1} - \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta\eta^2}\right)^2(\bar{y}_{j+2,k} - 4\bar{y}_{j+1,k} + 6\bar{y}_{j,k} - 4\bar{y}_{j-1,k} + \bar{y}_{j-2,k}) - (\Delta\eta)^2\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta\eta^2}\right)^2(\bar{y}_{j+1,k} - 2\bar{y}_{j,k} + \bar{y}_{j-1,k})\Big[N_0 g_{cr}^2$$
$$- \frac{1}{24}\frac{1}{\Delta\eta}\left\{(\bar{y}_{1,k} - \bar{y}_{-1,k})^2 + 4\sum_{n=2,4}^{M}(\bar{y}_{n,k} - \bar{y}_{n-2,k})^2 + 2\sum_{n=3,5}^{M-1}(\bar{y}_{n,k} - \bar{y}_{n-2,k})^2 + (\bar{y}_{M+1,k} - \bar{y}_{M-1,k})^2\right\}\Big] = (\Delta\tau)^2\frac{p l^4}{EIr} f\left(\frac{\lambda^2 k}{\omega}\Delta\tau\right) \quad (10)$$

式(10)から明らかなように，未知数$\bar{y}_{j,k+1}$が単独に決定されるため，本題の非線形振動の問題が線形振動と同じように取り扱うことが可能となり，数値計算が容易になることがわかる。なお，線形振動の場合には，差分法の陽公式における時間間隔$\Delta\tau$とスパン方向の分割間隔$\Delta\eta$との決定に際して，$\Delta\tau/\Delta\eta^2 < 1/2$の条件を満足する必要があること

が数学的に確認されている。そこで，式(10)の適用にあたっては一応 $\Delta\tau/\Delta\eta^2<1/2$ となるように $\Delta\tau$, $\Delta\eta$ を選ぶことが望ましいと考える。しかし，この点に関する詳細な検討については今後の研究にまちたい。

はりの曲げに対する境界条件を両端ヒンジばりおよび固定ばりの両者について示せばそれぞれ次のように与えられる。

両端ヒンジの場合； $\bar{y}_{0,k}=0$, $\bar{y}_{1,k}=-\bar{y}_{-1,k}$ （0点）， $\bar{y}_{M,k}=0$, $\bar{y}_{M+1,k}=-\bar{y}_{M-1,k}$ （M点） (11)

両端固定の場合 ； $\bar{y}_{0,k}=0$, $\bar{y}_{1,k}=\bar{y}_{-1,k}$ （0点）， $\bar{y}_{M,k}=0$, $\bar{y}_{M+1,k}=\bar{y}_{M-1,k}$ （M点） (12)

また，運動の初期条件を $\bar{y}(\eta,0)=f(\eta)$, $\frac{\partial\bar{y}(\eta,0)}{\partial\tau}=g(\eta)$ とすれば，任意点 j における初期条件は次のように表わされる。

$\bar{y}_{j,0}=f(j\Delta\eta)$, $\bar{y}_{j,1}=\bar{y}_{j,-1}+\Delta\tau\, g(j\Delta\eta)$ (13)

3．計算例　差分法の精度を検討するために，初期軸力 N_0 が作用しない両端ヒンジばりの非線形自由振動数について，分割数Mと振動数比 n^*/n_0 (n^*; 非線形自由振動数，n_0; 線形自由振動数）との関係を求めれば表-1に示すようにえられる。なお，演算にあたっては $\Delta\tau/\Delta\eta^2=1/2.2$ とし，表中に示した誤差は楕円積分による厳密解[3]に対するものである。表より分割数が増加すれば当然ながら誤差は減少するが，分割数が26程度でも十分な精度が得られており，さらに50程度になれば厳密解と一致しているといっても過言ではない。また，振幅比 $\bar{y}$ と誤差との関係は，分割数の少ない場合にやや増大する傾向にあるといえるが，その値はさほど大きいものではなく，従って非線形項が大きくなっても差分法の精度は保障されているといえる。以上より分割数を50程度にとれば十分であるといえ，以下の計算にこれを用いた。

$\bar{y}$ \ M	26	50	76	98	厳密解
0.0	0.996	0.999	0.999	1.000	1.0000
1.0	1.084	1.088	1.088	1.089	1.0892
2.0	1.313	1.316	1.317	1.317	1.3178
3.0	1.616	1.623	1.624	1.625	1.6257
4.0	1.963	1.973	1.975	1.975	1.9760
5.0	2.334	2.345	2.348	2.349	2.3501

表-1

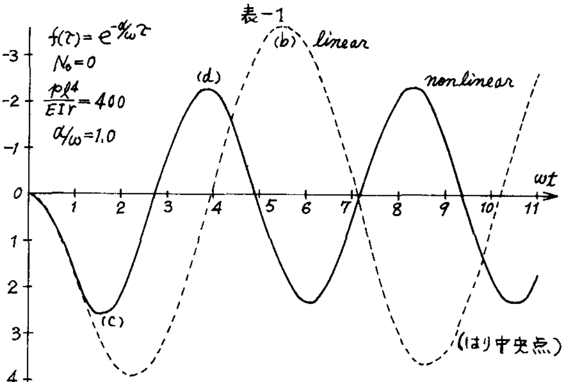


図-2 指数関数的減衰パルスに対する応答

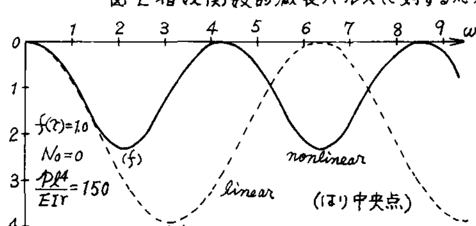


図-3 矩形ステップ形パルスに対する応答

両端ヒンジばりを対象に，指数関数的減衰パルスおよび矩形ステップ形パルスを受ける場合の応答を求めれば図-2および図-3に示すとおりである。これらの図において実線は非線形応答を示し，点線は線形応答を示す。非線形の場合には振幅に依存する軸方向力のために応答振幅は線形の場合よりも小さくなり，応答周波数が振幅に依存して変化することがわかる。表-2は各ケースの最大応答振幅について差分法と前論文の一自由度系と仮定したガラーキン法による結果とを比較したものである。表より線形・非線形のいずれの場合も両者が十分な精度で合致しており，最大応答振幅についてはガラーキン法による結果で十分であるといえる。他の境界条件および振幅による応答波形の変動については講演時に発表する。

	linear			nonlinear		
	(a)	(b)	(e)	(c)	(d)	(f)
差分法	3.939	-3.660	3.908	2.599	-2.312	2.335
ガラーキン法	3.954	-3.686	3.920	2.621	-2.307	2.333

表-2

参考文献　1) Wah, T ; Dynamic Response of Beams with Large Amplitudes, J. Aerospace Sci., Vol.27 (1961), pp 877~878, 2) Chishaki, T and Takahashi, K. ; Nonlinear Response of Beams to Pulse Excitations, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.21 (1973), pp 79~91, 3) Mei, C ; Nonlinear Vibration of Beams by Matrix Displacement Method, AIAA. J., Vol.10 No3 (1972), pp 355~357