

電力中央研究所 正員 ○中村秀治
電力中央研究所 正員 塩尻弘雄

1. はじめに 薄肉はりは橋梁など多くの土木構造物に用いられているが、局所的な静荷重が作用するとき、その断面形状の変化がはりの挙動に重要な影響を及ぼすことは知られている。本報告では、さらに薄肉はりの動的挙動に対して、断面形状の変化がどのような影響を有するのか検討しようとするものである。解析方法は参考文献1に述べた手法の動的解析への拡張であるが、マトリクス表示された折板要素の運動方程式は、任意の断面形状の薄肉はりに適用可能である。計算例として薄肉箱型はりを取りあげ、固有周期と固有モードを数値計算し、はりの横振動に近い固有周期を持つ複雑な断面変形振動モードの多数存在することを示す。

2. 折板要素の運動方程式 図-1に斜線で示す折板要素 i, j についての変位関数を仮定する。

$$w(x, s, t) = (1 - \frac{x}{b})w_i(z, t) + \frac{x}{b}w_j(z, t) \quad \text{----- (1)}$$

$$u(x, s, t) = (1 - \frac{x}{b})u_i(z, t) + \frac{x}{b}u_j(z, t) \quad \text{----- (2)}$$

$$v(x, s, t) = (1 - \frac{x}{b}S^2 + \frac{x^2}{b^2}S^2)v_i(z, t) + (S - \frac{x}{b}S^2 + \frac{x^2}{b^2}S^2)v_j(z, t) + (\frac{x^3}{b^3}S^2 - \frac{2x^2}{b^2}S^2)v_i(z, t) + (-\frac{x}{b}S^2 + \frac{x^2}{b^2}S^2)\theta_j(z, t) \quad \text{----- (3)}$$

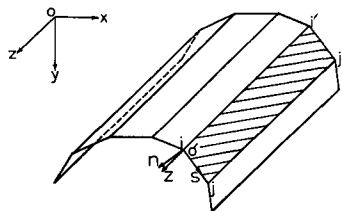


図-1 要素分割

ここで、 w, u はそれぞれ x, S 軸方向の板要素面内変位、 v は面外変位、 $w_i, u_i, \dots, w_j, u_j, \dots$ は i, j 辺の節線変位とする。 b は要素の板幅。

この変位関数と次の面内および面外の平衡方程式

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_x = 0 \quad (\text{X軸方向の平衡方程式}) \quad \text{----- (4)}$$

$$\frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p_s = 0 \quad (\text{S軸方向の平衡方程式}) \quad \text{----- (5)}$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^4}) + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q \quad (\text{面外方向の平衡方程式}) \quad \text{----- (6)}$$

により、Galerkin法で変数 s を消去すると、節線変位、節線外力の関係式が連立偏微分方程式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} w_i(z, t) \\ u_i(z, t) \\ v_i(z, t) \\ \theta_i(z, t) \\ w_j(z, t) \\ u_j(z, t) \\ v_j(z, t) \\ \theta_j(z, t) \end{Bmatrix} = \left\{ [M] \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + [K_1] \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + [K_2] \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^4 + [K_3] \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + [K_4] \right\} \begin{Bmatrix} w_i(z, t) \\ u_i(z, t) \\ v_i(z, t) \\ \theta_i(z, t) \\ w_j(z, t) \\ u_j(z, t) \\ v_j(z, t) \\ \theta_j(z, t) \end{Bmatrix} \quad \text{----- (7)}$$

ここで、 $w_i(z, t), u_i(z, t), \dots, w_j(z, t), \dots$ は i, j 辺の節線外力。 $[M]$ は次に示すマトリクス。

$$[M] = \rho_{ij} h_{ij} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} b_{ij} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} b_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{3} b_{ij} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} b_{ij} & 0 & 0 \\ & & \frac{13}{36} b_{ij} & \frac{11}{210} b_{ij}^2 & 0 & 0 & \frac{9}{70} b_{ij} & -\frac{13}{420} b_{ij}^2 \\ & & & \frac{1}{105} b_{ij}^3 & 0 & 0 & \frac{13}{420} b_{ij}^2 & -\frac{1}{140} b_{ij}^3 \\ & & & & \frac{1}{3} b_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{1}{3} b_{ij} & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{13}{36} b_{ij} & -\frac{11}{210} b_{ij}^2 \\ & & & & & & & \frac{1}{105} b_{ij}^3 \end{pmatrix} \quad \text{----- (8)}$$

Sym.

$\rho_{ij}, h_{ij}, b_{ij}$ はそれぞれ要素 i, j の密度、板厚、板幅。 $[K_1], \dots, [K_4]$ は参考文献1に示すマトリクスである。

3. 固有振動の数値計算 薄肉はりの運動方程式は、(7)式で表わされる各要素の方程式を重ね合わせるこ
とにより作られる。薄肉はりの両端の支持条件を単純支持とすれば、Z軸方向荷重および変位は \cos 、他は \sin
でFourier級数に展開できる。即ち $w_i(z,t) = \sum W_{in}(t) \cos \frac{n\pi z}{L}$, $w_i(z,t) = \sum w_{in}(t) \cos \frac{n\pi z}{L}$, $U_i(z,t) = \sum U_{in}(t) \sin \frac{n\pi z}{L}$
 $U_i(z,t) = \sum u_{in}(t) \sin \frac{n\pi z}{L}$, -----, $\Theta_i(z,t) = \sum \Theta_{in}(t) \sin \frac{n\pi z}{L}$, $\Theta_i(z,t) = \sum \theta_{in}(t) \sin \frac{n\pi z}{L}$ である。
 $\{P\}^T = \{W_n, U_n, V_n, \Theta_n, W_n, \dots, W_{mp}, U_{mp}, V_{mp}, \Theta_{mp}\}$, $\{\delta\}^T = \{w_n, u_n, v_n, \theta_n, w_n, \dots, w_{mp}, u_{mp}, v_{mp}, \theta_{mp}\}$ (mは節
線数, pは級数項数)とすれば、級数の直交性により薄肉はりの運動方程式は次式のように表わされる。

$$(\tilde{M})\{\dot{\delta}\} + (\tilde{K})\{\delta\} = \{P\} \quad \text{----- (9)}$$

固有振動は、(9)式より $[\tilde{K}] - \omega^2[\tilde{M}] = 0$ で求められるが、コレスキー分解 $[\tilde{K}] = [L][L]$ により、
 $[L]^T[\tilde{M}][L] - \frac{1}{\omega^2}[I] = 0$ として対称マトリクス $[L]^T[\tilde{M}][L]$ の固有値計算をするのが有利である。

4. 計算結果の検討 図-2に示す両端単純支持の薄肉箱型はりについて、固有周期と固有モードを計算
した。4要素に分割し、級数項は5項取り、固有値計算はJacobiの方法により行った。その結果、多数の複
雑な断面変形の固有振動モード、固有周期が得られたが、図-3および表-1に代表的な固有モードとそれに対
応する固有周期を示す。(a)は断面の増大減少振動。(b)はねじれ振動。(c),(d)ははりの横振動。(e)は断面
の菱形になる振動。(f)は板の曲げ振動である。

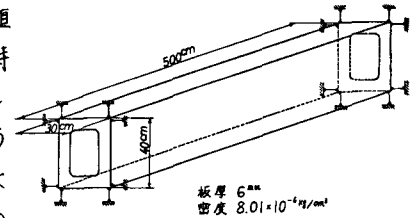


図-2 薄肉箱型はり

表-1により、(a)~(f)のモードに対応する固有周期が非常に近い値
を持つことが明らかである。これは、薄肉はりに動的荷重が作用する時
(たとえば地震波)、断面変形振動がはり全体の挙動に大きく影響するこ
とを示している。特に(e)のモードの振動はボックスガーター橋のよう
に上下非対称断面の桁に生じやすいものと考えられる。なお、(c),(d)に
ついては、はり理論により得られる固有周期と比較した、表-1()内の
値がはり理論値である。(c),(d)共に、波数1の場合は相対誤差6.5%、
6.8%で本解法による値とはり理論値はほぼ一致する。本解法により
得られる固有周期がはり理論値より大きな値を与えるのは、図-3に示
するようなフランジのたわみによるものと考えられる。

波数 モード	1	2	3
(a)	0.0252	0.0251	0.0249
(b)	0.3870	0.1392	0.1086
(c)	2.1125 (1.9751)	0.6069 (0.4937)	0.4077 (0.2195)
(d)	2.6310 (2.4515)	0.7771 (0.6128)	0.5333 (0.2724)
(e)	1.4339	0.8333	0.4381
(f)	0.8083	0.7988	0.7835

表-1 固有周期 ($\times 10^{-2}$ sec)

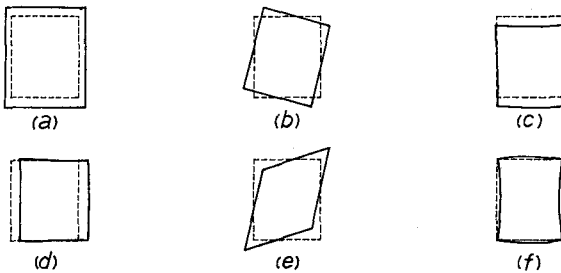


図-3 固有モード

5. 結語 以上、折板要素の運動方程式を誘導し、薄肉箱型はりに適用して断面変形振動について考察し
た。V. Z. Vlasovの断面変形を考慮した(薄肉はりの)解析理論の4つの変位関数と(b),(c),(d),(e)が一致するのは興
味あることである。本解法により、薄肉はりの動的挙動に対するダイヤフラムの効果を検討することも可能で
あり、動的応答解析も有限要素法と同様に行なえる。数値計算にはIBM370-165を用いた。

参考文献 (1) 奥村敏恵, 中村秀治: 薄肉梁の一解析法とダイヤフラムの効果について, 土木学会年次学術講
演会資料, 昭和46年10月 (2) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells,
McGraw Hill, 1959 (3) Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw Hill