I-217 階段状変断面ばりの振動について

長崎大学 正員 崎山 毅

1．まえがき

断面積が長さ方向に、階段状に不連続に変化するいわゆる階段状変断面ばりは構造物として、あるいは構造物の1部材として使用される。また、長さ方向に連続的に任意にその大きさが変化する断面を有するはりの力学的性状は、適正に置換された階段状変断面ばりを解析することにより十分精密に把握することができる。

階段状変断面ばりの自由振動に関しては、1個の断面急変部を有するはりの最低次振動数を、積分方程式を用いて求めたTaleb, Suppiger[1]の近似解法や階段状変断面静定ばりの第1次振動数の下限値を明らかにしたBuckens[2]のdecomposition methodなどがある。また、斎藤、佐藤は1個の断面急変部を有する片持ばりの自由振動性状を理論的および実験的に研究し、Bernoulli－Eulerの初等曲げ理論からみちびかれる振動方程式により十分正確に振動性状を解析しうることを明らかにした。

この研究は、断面急変部においても力が連続するものとして、任意個の階段を有する変断面ばりの自由振動を解析したものである。任意の境界条件をもつ階段状変断面ばりの振動数方程式および振動モードに関して、簡明な表式をえることができた。

2．微分方程式

鉛直荷重強度、たわみ、曲げモーメントおよび曲げ剛性をそれぞれ $q(x)$, $\bar{y}(x)$, $\bar{M}(x)$, $EI(x)$ とすれば、直線ばりの基礎微分方程式は周知の次式である。

$$\frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = -q(x) \quad (1\cdot a), \qquad \bar{M}(x) = -EI(x)\frac{d^2\bar{y}}{dx^2} \quad (1\cdot b)$$

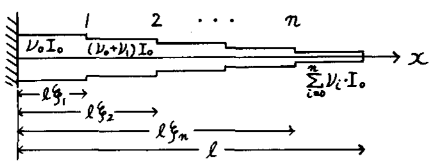

図-1 階段状変断面ばり

図-1に示す階段状変断面ばりの断面2次モーメント $I(x)$ は、単位階段関数 $u(x-a_i)$ を用いて

$$I(x) = I_0 \sum_{i=0}^{n} \nu_i u(x-a_i) \quad (2)$$

ただし、ν_i は i 番目の断面急変部における断面2次モーメントの増加率であり、n は断面急変部の数である。

式(1·a),(1·b)および(2)より、階段状変断面ばりの基礎微分方程式として次の2式がえられる。

$$\frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = -q(x) \quad (3\cdot a), \qquad \bar{M} = -EI_0\sum_{i=0}^{n}\nu_i u(x-a_i)\frac{d^2\bar{y}}{dx^2} \quad (3\cdot b)$$

3．自由振動方程式

式(3·a)、(3·b)より階段状変断面ばりの自由振動方程式が導かれる。図-1のはりの単位長当りの質量 $\rho(x)$ は

$$\rho(x) = \rho_0 \sum_{i=0}^{n} \mu_i u(x-a_i) \quad (4)$$

ただし、μ_i は第 i 番目の不連続部における単位長質量の増加率である。したがって、慣性力 q は

$$q = -\rho_0 \sum_{i=0}^{n} \mu_i u(x-a_i)\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} \quad (5)$$

と表わされるゆえ、所要の曲げ振動方程式は、減衰性、回転慣性を無視して

$$\frac{\partial^2\bar{M}}{\partial x^2} = \rho_0\sum_{i=0}^{n}\mu_i u(x-a_i)\frac{\partial^2\bar{y}}{\partial t^2} \quad (6\cdot a), \qquad \bar{M} = -EI_0\sum_{i=0}^{n}\nu_i u(x-a_i)\frac{\partial^2\bar{y}}{\partial x^2} \quad (6\cdot b)$$

式(6·a)、(6·b)に次の2式

$$\bar{y}(x,t) = y^*(x)\sin\omega t, \quad \bar{M}(x,t) = M^*(x)\sin\omega t, \quad \omega: 固有角振動数$$

を代入し、変数xを無次元変数 $\eta = x/\ell$ で置き換え、改めて $y = y^*/\ell$, $M = -\ell M^*/EI_0$ とすれば、無次元化されたたわみおよび曲げモーメントの基準関数 y, M に関する次式がえられる。

$$\frac{d^2M}{d\eta^2} = \lambda^4 \sum_{i=0}^{n} \mu_i u(\eta-\xi_i)\, y \quad (7\cdot a), \qquad M = EI_0 \sum_{i=0}^{n} \nu_i u(\eta-\xi_i) \frac{d^2 y}{d\eta^2} \quad (7\cdot b)$$

ただし　$\lambda^4 = \rho_0 \omega^2 \ell^4 / EI_0$　,　$\xi_i = a_i/\ell$　,　ℓ：部材全長

このとき、無次元化されたたわみ角 $\theta(\eta)$ およびせん断力 $Q(\eta)$ は

$$\theta(\eta) = \frac{dy}{d\eta} \quad (7\cdot c), \qquad Q = \frac{dM}{d\eta} \quad (7\cdot d)$$

4、微分方程式の解

Laplace 変換を用いて、連立微分方程式 (7·a), (7·b) より関数 $y(\eta)$, $M(\eta)$ が求められ、また式 (7·c), (7·d) より関数 $\theta(\eta)$, $Q(\eta)$ がえられる。結果は次のとおりである。

$$y(\eta) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{4} \left[y(0)\cdot a_{1km} + \theta(0)\cdot a_{2km} + M(0)\cdot a_{3km} + Q(0)\cdot a_{4km} \right] f_{1km}(\eta)\cdot u(\eta-\xi_k) \quad (8\cdot a)$$

$$\theta(\eta) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{4} \left[y(0)\cdot a_{1km} + \theta(0)\cdot a_{2km} + M(0)\cdot a_{3km} + Q(0)\cdot a_{4km} \right] f_{2km}(\eta)\cdot u(\eta-\xi_k) \quad (8\cdot b)$$

$$M(\eta) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{4} \left[y(0)\cdot a_{1km} + \theta(0)\cdot a_{2km} + M(0)\cdot a_{3km} + Q(0)\cdot a_{4km} \right] f_{3km}(\eta)\cdot u(\eta-\xi_k) \quad (8\cdot c)$$

$$Q(\eta) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{4} \left[y(0)\cdot a_{1km} + \theta(0)\cdot a_{2km} + M(0)\cdot a_{3km} + Q(0)\cdot a_{4km} \right] f_{4km}(\eta)\cdot u(\eta-\xi_k) \quad (8\cdot d)$$

ただし、

$$a_{pkm} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{4} f_{mij}(\xi_k)\cdot a_{pij} \quad (p, m = 1,2,3,4), \qquad a_{pom} = \delta_{pm} \quad (\text{クロネッカーのデルタ})$$

$$f_{1km}(\eta) = \begin{cases} g_{jm}(\eta-\xi_k) - g_{km}(\eta-\xi_k) & (m=1,2) \\ \beta_j g_{jm}(\eta-\xi_k) - \beta_k g_{km}(\eta-\xi_k) & (m=3,4) \end{cases}, \quad f_{3km}(\eta) = \begin{cases} \frac{\lambda_j^4}{\beta_j} g_{js}(\eta-\xi_k) - \frac{\lambda_k^4}{\beta_k} g_{ks}(\eta-\xi_k) & (m=1,2) \\ f_{1kt}(\eta) & (m=3,4), \ (s=m+2,\ t=m-2) \end{cases}$$

$$f_{skm}(\eta) = \frac{d}{d\eta}\left\{ f_{tkm}(\eta) \right\} \quad (s=2,4,\ t=s-1,\ m=1,2,3,4)$$

$$f_{pom}(\eta) = \frac{d^s}{d\eta^s}\left\{ \frac{1}{2\lambda^3}(\sinh\lambda\eta - \sin\lambda\eta) \right\} \quad (p, m = 1,2,3,4,\ s = 3+p-m)$$

$$g_{km}(\eta) = \frac{d^s}{d\eta^s}\left\{ \frac{1}{2\lambda_k^3}(\sinh\lambda_k\eta - \sin\lambda_k\eta) \right\} \quad (m = 1,2,3,4,\ s = 4-m)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} \nu_i}, \qquad \lambda_k^4 = \beta_k \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i \cdot \lambda^4$$

5、振動数方程式および振動モード

1例としてn個の不連続部をもつ単純支持変断面ばりの振動数方程式と振動モードを示す。

振動数方程式　$$\begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{4} a_{2km}\cdot f_{1km}(1) & \sum\sum a_{4km}\cdot f_{1km}(1) \\ \sum\sum a_{2km}\cdot f_{3km}(1) & \sum\sum a_{4km}\cdot f_{3km}(1) \end{vmatrix} = 0$$

振動モード　$$y(\eta) = \theta(0) \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{4} (a_{2km} - \alpha_1 a_{4km}) f_{1km}(\eta)\cdot u(\eta-\xi_k), \quad \alpha_1 = \frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{4} a_{2km}\cdot f_{1km}(1)}{\sum\sum a_{4km}\cdot f_{4km}(1)}$$

6、数値解析例　講演時に示す。

（参考文献）

(1) N. J. Taleb and E. W. Suppiger, Vibration of Stepped Beams, J. Aerospace Sciences, April, 1961

(2) F. Buckens, Eigenfrequences of Nonuniform Beams, AIAA Journal, 1963

(3) 斎藤秀雄, 佐藤秀紀「急変断面を有する弾性はりの振動」日本機械学会論文集, 昭43-5