

本州四国連絡橋公団 正会員 林 有一郎
 " " " 〇保田 雅彦

1. まえがき

早橋の曲げ振動解析の手法は、従来の早橋解析の手法が機理論によっていたために、微分方程式で表示された慣性力項を含むケーブルと桁の釣合方程式とケーブル方程式を基にし、それらを差分展開によって解くか、もしくはエネルギー原理によって表わされたケーブルと桁の釣合式に対しRitzの方法を適用して解くかのいずれかによることが多い。しかしながら最近発達した有限変形理論を振動問題に適用すれば早橋の面内および面外の曲げ振動問題と剛体系を含めたマトリックス骨組構造解析の一問題として容易にとり扱うことができる。この方法を適用するためには従来の機理論との対照を明確にしなくてはならないが、この論文はその対照について考察し、又軸力部材の有限変形マトリックスの物理的意味を明らかにするものである。

2. 軸力部材の撓線剛性マトリックス

図1で表わされるように軸力Tをとる軸力部材abが微小移動にてa'b'へ移ったとすると構造座標で表わされた節変力の増分項と変位増分項との関係は次式で表わされる。⁴⁾

$$\begin{Bmatrix} dF_a \\ dF_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_a \\ dX_b \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに、

$$dF = [dF_x, dF_y]^T, \quad dX = [dX, dY]^T$$

$$k_{11} = \frac{AE}{L_0} \cos^2 \alpha + \frac{T}{L} \sin^2 \alpha$$

$$k_{12} = k_{21} = \left(\frac{AE}{L_0} - \frac{T}{L} \right) \sin \alpha \cos \alpha$$

$$k_{22} = \frac{AE}{L_0} \sin^2 \alpha + \frac{T}{L} \cos^2 \alpha$$

L_0 : 無応力長, L : 実際長

式(1)は実は座標変換マトリックスの操作により部材座標系で表わすと次式の関係がなりたつ。

$$\begin{Bmatrix} dF_a \\ dF_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_a \\ dX_b \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 $dF = [dF_x, dF_y]^T$: 部材座標で表わされた節変力増分
 $dX = [dX, dY]^T$: 節変位増分

$$k_{11} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L_0} & 0 \\ 0 & \frac{T}{L} \end{bmatrix}$$

3. 撓線剛性マトリックスの物理的意味

式(2)は「引張力Tを有する軸力部材は、軸剛性 $\frac{AE}{L_0}$ を、又横剛性 $\frac{T}{L}$ をとる」と解することができる。軸剛性 $\frac{AE}{L_0}$ の意味は微小変形理論により自明であるが横剛性 $\frac{T}{L}$ は次のような物理現象に適用することによって説明できる。

1) 弦の振動

引張軸力T, 線変位 ρ をとる弦の振動問題に式(2)を適用する。図2で表わされるように節変 i の釣合方程式は式(2)より次式となる。

$$-\frac{\rho}{g} 4X \ddot{v}_i + \frac{T}{\Delta X} \Delta v_{i+1} - \frac{T}{4X} \Delta v_i = 0 \quad (3) \quad \text{ここに、} \Delta v_i = v_i - v_{i-1}$$

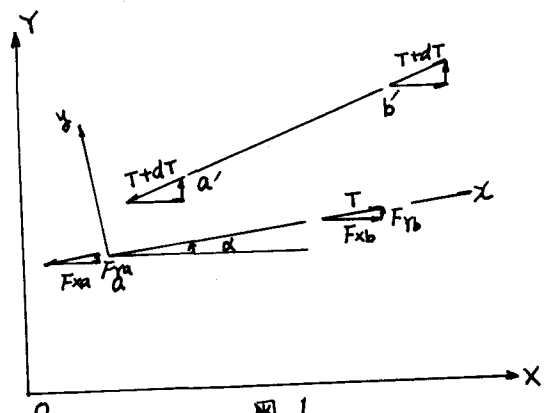


図1

式(1)は次式に変更される。

$$\frac{\rho}{g} \ddot{v}_i - T \frac{\Delta v_{i+1} - \Delta v_i}{\Delta x^2} = 0 \quad (4)$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とすることによって次式となる。

$$\frac{\rho}{g} \ddot{v}_i - T \frac{dv}{dx} = 0 \quad (5)$$

即ちこれは弦の振動方程式となる。

2) 単振動 (遊動円木振動)

質量 m , 腕の長さ L の単振り子の振動問題に適用する。

張力 T は mg となるから、釣合方程式は次のようになる。(図3)

$$m \ddot{u} - \frac{mg}{L} u = 0 \quad (6)$$

$$\text{即ち} \quad \ddot{u} - \frac{g}{L} u = 0 \quad (7)$$

これは単振動の式である。

式(2)の剛性マトリックスの横抵抗項は、軸力が引張力の時正で圧縮力の時負である。従って圧縮力を受けると振子構造部材は、変形を受けると不安定側になることが分る。

4. ケーブルの釣合方程式との対応

式(2)で表わされる軸力部材の剛性マトリックス、梁部材の

剛性マトリックス、剛体マトリックスを組合せた任意変形振動プログラムによって吊橋振動解析は、桁、ケーブルの鉛直および横方向慣性力、ハンガーバネ、ハンガーの横抵抗、遊動円木現象とすべて考慮して解析可能なのであるが、そのためには理論論が使われるケーブルの釣合方程式と式(2)との関係を明らかにしておく必要がある。この点について福田、後藤の研究があるのでそれらを参考に検討する。

図4の上図のようにケーブルとハンガーで構成される構造系を考える。ハンガーは理論論との対応のために斜めハンガー効果を考慮しないものとする。活荷重が載荷されて変形した後のケーブルの節変位の記号を文献(1)に合わせて下図で示されるように定義する。ケーブルの変形前の(死荷重釣合時の)釣合式を次式で表わす。

$$H_{ub} \bar{v}_{i-1} + H_{ua} \bar{v}_i = 0 \quad (8)$$

$$V_{ub} \bar{v}_{i-1} + V_{ua} \bar{v}_i = R_{wi} + W_{ci} \quad (9)$$

ケーブル変形後の釣合方程式を次式で表わす。

$$H_b \bar{v}_{i-1} + H_a \bar{v}_i = 0 \quad (10)$$

$$V_b \bar{v}_{i-1} + V_a \bar{v}_i = R_{ci} + W_{ci} \quad (11)$$

(10), (11)を死荷重釣合時の状態で Taylor 展開する。軸力部材の第一次項係数は(1)で与えられているので次式がなりたつ。記号は文献(1)に合わせて変えている。

$$H_{ub} \bar{v}_{i-1} + H_{pb} \bar{v}_{i-1} + H_{ua} \bar{v}_i + H_{pa} \bar{v}_i + O(2) = 0 \quad (12)$$

$$V_{ub} \bar{v}_{i-1} + V_{pb} \bar{v}_{i-1} + V_{ua} \bar{v}_i + V_{pa} \bar{v}_i = R_{wi} + \Delta R_{ci} + W_{ci} + O(2) \quad (13)$$

ここに

$$\begin{pmatrix} H_{pa} \\ V_{pa} \\ H_{pb} \\ V_{pb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{km} & -k_{kn} \\ -k_{km} & k_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_a \\ \bar{x}_b \end{pmatrix} \quad (14)$$

式(12), (13)に(8), (9)を代入し、2次の微小項を無視すると次式がえられる。

$$H_{pb} \bar{v}_{i-1} + H_{pa} \bar{v}_i = 0 \quad (15)$$

$$V_{pb} \bar{v}_{i-1} + V_{pa} \bar{v}_i = \Delta R_{ci} \quad (16)$$

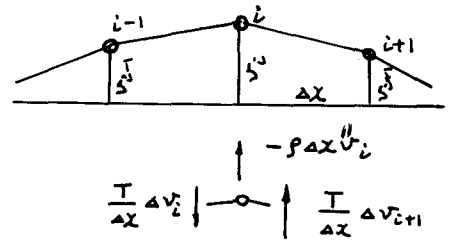


図2 弦の振動

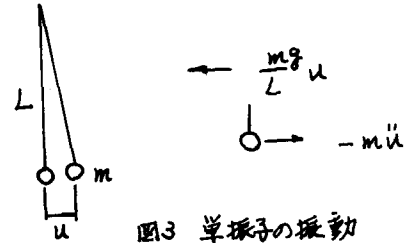


図3 単振り子の振動

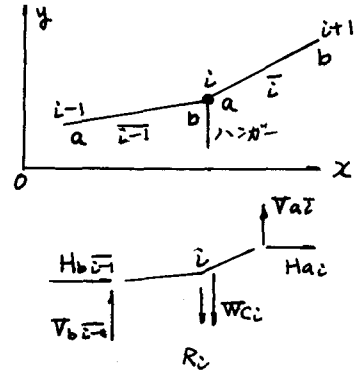


図4 ケーブルの釣合

水平方向の釣合式(13)及び式(14)より次式が得られる。

$$H_p = H_{pa} \bar{z} = k_{11} \bar{z} (\bar{z} a \bar{z} - \bar{z} b \bar{z}) + k_{12} \bar{z} (z a \bar{z} - z b \bar{z}) \quad (17)$$

$$\text{17)式を变形し} \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_{11} \bar{z}_i} = \sum_{i=1}^n \frac{k_{12} \bar{z}_i}{k_{11} \bar{z}_i} (z a \bar{z}_i - z b \bar{z}_i) \quad (18)$$

節長の適合条件 $z b \bar{z}_i = z a \bar{z}_{i+1} = z c_{i+1}$ を(18)へ代入すると、

$$H_p \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_{11} \bar{z}_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{k_{12} \bar{z}_i}{k_{11} \bar{z}_i} - \frac{k_{12} \bar{z}_{i-1}}{k_{11} \bar{z}_{i-1}} \right) z c_i \quad (19)$$

ケーブル橋身長 L の x 軸方向成分を Δx とすると Δx は $L \cos \alpha_i$ に等しいから次式がなりたつ。

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_{11} \bar{z}_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x}{AE \cos^2 \alpha_i} \frac{1}{1 + K \bar{z}_i \tan^2 \alpha_i} \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{k_{12} \bar{z}_i}{k_{11} \bar{z}_i} - \frac{k_{12} \bar{z}_{i-1}}{k_{11} \bar{z}_{i-1}} \right) z c_i = \sum_{i=1}^n \frac{\tan \alpha_i - \tan \alpha_{i-1} + O(K)}{(1 + O(K)) \Delta x} z c_i \Delta x \quad (21)$$

ここに $K = \frac{T}{AE \bar{z}^2}$, K は数値であり、又、 $O(K)$ は K の1次以上の微小項を表す。 K は有限変形理論を用いる時に表れるものであるが、今式(20), (21)に微小変形理論を適用すると、即ち $K=0$ とすると $\tan \alpha_i$ が $\Delta y_{i+1} / \Delta x$ と等しいことを考慮し、 $\Delta x \rightarrow 0$ とすると、式(22)は次のようになる。

$$H_p \frac{1}{AE} \int \frac{1}{\cos^2 \alpha} dx = \frac{d^2 y}{dx^2} \int z dx \quad (22)$$

即ち、(22)式が微積分論におけるケーブル方程式を表わすことは明らかである。

次に鉛直方向の釣合式(16)及び(14)式より次式を得る。

$$V_p a \bar{z} = k_{12} \bar{z} (\bar{z} a \bar{z} - \bar{z} b \bar{z}) + k_{22} \bar{z} (z a \bar{z} - z b \bar{z}) \quad (23)$$

$$\text{17)式及び(23)式より} \quad H_p \frac{\tan \alpha_i - K \tan \alpha_{i-1}}{1 + K \tan^2 \alpha_i} \frac{(k_{12} \bar{z}_i)^2 - k_{11} k_{22} \bar{z}_i}{k_{11} \bar{z}_i} (z c_i - z c_{i+1})$$

$$= - \frac{T}{\cos \alpha_i L \cos \alpha_i} \frac{1}{1 + K \tan^2 \alpha_i} \Delta z_{i+1} = - \frac{H_w}{\Delta x} \frac{1}{1 + K \tan^2 \alpha_i} \Delta z_{i+1} \quad (24)$$

ここに Δz は z の差分を表す。ここで K の項を無視すると結局(24)式は次のようになる。

$$V_p a \bar{z} = H_p \tan \alpha_i - \frac{H_w}{\Delta x} \Delta z_{i+1} \quad (25)$$

(25)式を(16)式へ代入すると

$$H_p \frac{\tan \alpha_i - \tan \alpha_{i-1}}{\Delta x} - H_w \frac{\Delta z_{i+1} - \Delta z_i}{\Delta x^2} = \frac{\Delta R_i}{\Delta x} \quad (26)$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とすると次式が得られる。

$$H_p \frac{d^2 y}{dx^2} - H_w \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dR}{dx} = r_p \quad (27)$$

即ち、この式は線形化変位理論における鉛直方向釣合方程式である。以上より式(1)もしくは式(2)の剛性マトリックスを用いて吊橋の解析を行なうことは線形化変位理論に斜めハッカーの影響を代入して解析する事と等価になることが分る。

5. 数値計算例

詳しくは当日報告するが本回公園で設計された前橋護国大橋計画設計の断面を用いると表-1のようになる。

固有周期	全橋性力 E 入ったもの	橋軸方向橋性力 E 無し	微積分論による差分展開
1次	8.36	7.40	7.68
2次	7.45	5.66	5.71
3次	5.70	4.40	4.44
4次	4.44	3.25	3.24

表-1 固有周期の比較 (単位: sec)

6. 参考文献

- 1) 平井敦: 「鋼橋Ⅱ」, 1967, 技報堂
- 2) Takeo Fukuda: Analysis of longitudinally loaded suspension bridges, ASCE/1988
- 3) 後藤茂夫: 有限変形法による吊橋の解析, JSCE, 1969.
- 4) 林有一郎: 有限変形変位法によるケーブル解析, 日本鋼橋協会第5回大会研究集論文集