I-172　薄肉断面曲線ばりの基礎方程式

東京大学工学部　正員　○　西野文雄
アジア工科大学　Seng-Lip Lee

1．まえがき

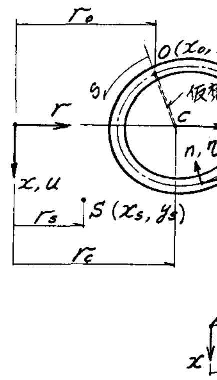
断面の広がりの影響を考慮した曲線ばりの解析には、開断面部材を取り扱った小西、小松[1]、開断面、閉断面の両者を取り扱った倉西[2]、深沢[3]の研究があり、いずれも幾何学的考察によって力の釣り合い式を求めている。これら3つの研究成果には、実用上の影響はないものの、わずかながら差異がみられる。同じ問題を変分原理を用いて有限変位の立場から基礎方程式を求めたものに事口、中井[4]の研究発表がある。ここでは微少変位理論の範囲で、変分原理を用いて曲線ばりに関する基礎方程式を導いた結果を報告する。この報告の主目的は、材料力学ですでに認められている仮定のみを用い、あとは全て数学的な演算のみによって基礎方程式を導くことにあり、これによって、曲りばりの理論における仮定と、それに釣りあった基礎方程式の関係を明らかにするものである。この報告では薄肉断面で出来た円弧円線ばりを取り扱う。基本的な仮定は(1) 断面　は変形しない、(2) 薄肉断面構成板の中心面に直交し部材軸に平行な面でのせん断ひずみは無視出来る、(3) 薄肉断面構成板の中心面内でのせん断ひずみは開断面では0．閉断面ではせん断ひずみの内、直応力の変化分と釣り合うせん断応力によるものは無視出来る、の3つである。この第3の仮定は Bernoulli-Euler の仮定を一般化したものである。

2．一次元問題としたときの円弧曲りばりのひずみ－変位関係

右手系の円筒座標（r,θ,x）で表わした微少変位理論によるひずみと変位との関係は次のように書かれる。

$$\epsilon_r=\frac{\partial v}{\partial r},\quad \epsilon_\theta=\frac{\partial w}{r\partial\theta}+\frac{v}{r},\quad \epsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{r\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r},\quad \gamma_{rx}=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad \gamma_{x\theta}=\frac{\partial u}{r\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (1)$$

ここに v, w, u はそれぞれ r, θ, x 方向への変位。



仮定(1) は次のように表わされる。

$$\epsilon_r=0,\quad \epsilon_x=0,\quad \gamma_{rx}=0 \qquad (2)$$

(1)を(2)に代入し積分すると

$$u=u_s-(y-y_s)\beta_s,\quad v=v_s+(x-x_s)\beta_s \qquad (3)$$

ここに $y=r-r_c$（r_cは任意に選んだ x, y 座標の原点Cでの曲率半径）、u_s, v_s, β_s は積分定数であり、u_s, v_s は任意の点 $S(x_s, y_s)$ での x、y 方向への変位、β_s は断面の剛体回転角を表わす。仮定(2)と(3)を用いるために $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{x\theta}$ のかわりに薄肉中心面とそれに直交する面内のせん断ひずみ $\gamma_{s\theta}$, $\gamma_{n\theta}$ を考える。このせん断ひずみは断面の中心面にそって取ったS座標の x、y 軸に関する方向余弦 l, m を用いて次のように表わされる。

$$\gamma_{s\theta}=\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{m}{r}w+\frac{\partial\xi}{r\partial\theta}\qquad \gamma_{n\theta}=\frac{\partial w}{\partial n}-\frac{l}{r}w+\frac{\partial\eta}{r\partial\theta} \qquad (4)$$

ここに n はSに直角な座標であり、(s, n, θ) は右手系を構成する。s, n 方向への変位を ξ, η とすると、これらは(3)と方向余弦 l, m を用いて、次のように表わされる。

$$\xi=u_s l+v_s m+\rho_s\beta_s,\quad \eta=-u_s m+v_s l+\rho_n\beta_s \qquad (5)$$

ここに

$$\rho_s=m(x-x_s)-l(y-y_s),\quad \rho_n=l(x-x_s)+m(y-y_s) \qquad (6)$$

仮定の(2)から　$\gamma_{n\theta}=0$。これに(4)、(5)を代入して積分すると

$$w(s,n,\theta)=r\,w^*/r^*+(m\,u_s'-l\,v_s'-\rho_n\beta_s')\,n/r^* \qquad (7)$$

ここにW_0^*は積分定数であり、薄板中心面$(S, n=0, \theta)$でのθ方向への変位を表わす。上添記号$*$は板の中心面上$(n=0)$の量を表わし、プライムはθに関する微分を表わす。

θ方向への力のつり合い条件は、せん断流れ $q^* = \tau_{s\theta}^* \cdot t$ (tは板厚)を用いると次のように書かれる。

$$\frac{\partial q^*}{\partial s} + \frac{2m\, q^*}{r^*} + \frac{t}{r^*}\frac{d\sigma_\theta^*}{d\theta} + \int_{-t/2}^{t/2} P_{\theta d}\, dn = 0 \qquad (8)$$

$P_{\theta d}$は分布して働く外力のθ方向成分。等断面部材では$t = t(S)$。この条件で(8)を積分すると

$$q = \left(\frac{r_1^*}{r^*}\right)^2 q_1 - \frac{1}{(r^*)^2}\int_{s=s_1}^{s}\left[r^* t\frac{d\sigma_\theta^*}{d\theta} + (r^*)^2\int_{-t/2}^{t/2} P_{\theta d}\, dn\right] ds \qquad (9)$$

q_1^*は積分定数であり、q_1^*, r_1^*は任意の点$S = S_1$でのせん断流れ、曲率半径である。(9)をGtで割り、仮定(3)を用いると

$$\gamma_{s\theta}^* = \frac{q_1^*}{Gt}\left(\frac{r_1^*}{r^*}\right)^2 \qquad (10)$$

開断面では仮定(3)から $\gamma_{s\theta} = 0$、これは(10)式において、S_1を自由端に選び、$q_1^* = 0$ となる場合に相当する。

(5)、(10)を(4)の第一式に代入して積分すると

$$W^* = r^*\left[\frac{W_0^*}{r_0^*} - \left(\frac{x^* - x_s}{r^*} - \frac{x_0^* - x_s}{r_0^*}\right)\frac{u_s'}{r_s} - \left(\frac{y^* - y_s}{r^*} - \frac{y_0^* - y_s}{r_0^*}\right)\frac{v_s'}{r_s} - \left(\int_0^s \frac{\rho_t^*}{(r^*)^2}ds\right)\left(\frac{u_s'}{r_s} + \beta_s'\right) + \frac{(r_1^*)^2 q_1^*}{G}\int_0^s \frac{ds}{(r^*)^3 t}\right] \qquad (11)$$

r_sは$S(x_s, y_s)$での曲率半径、下添字0は任意の点に選んだS座標の原点0での値を表わす。W_0^*は積分定数であり$S=0, n=0$ でのWの値を表わす。開断面では仮定により$\gamma_{s\theta} = 0$, したがって$q_1^* = 0$。閉断面では閉じたループについてのWの連続条件、すなわち$W(S) = W(S + \oint \frac{\partial W}{\partial S} dS)$に(11)を代入することによって

$$q_1^*(r_1^*)^2 = \left(\frac{u_s'}{R_s} + \beta_s'\right)\left(\oint \frac{\rho_t^*}{(r^*)^2} dS \Big/ \oint \frac{dS}{(r^*)^3 t}\right) G \qquad (12)$$

一般に任意に選んだx, y座標の原点CはS座標上にないので、WはC点で定義出来ない。(11)の積分定数を便宜上、C点でのWで表わすために、C点と0点を仮想的な$t=0$の板で結ぶ。板厚が0なので、このような仮想的な部分をつけたしてもはりの力学的性状にはなんら変化をおよぼさない。C点でのWをW_cとすると、(11)、(12)から

$$W_0^*/r_0^* = \{W_c - [x_s + (x_0^* - x_s)(r_c/r_0^*)](u_s'/r_s) - [y_s + (y_0^* - y_s)(r_c/r_0^*)]v_s'/r_s + \Omega(S_c)(u_s'/r_s^2 + \beta_s'/r_s)/r_c\}/r_c \qquad (13)$$

ここに

$$\Omega(s) = \begin{cases} r r_s \int_0^s \frac{\rho_s}{(r^*)^2} ds & (\text{開断面}) \\ r r_s \int_0^s \frac{\rho_s}{(r^*)^2} ds - \frac{\oint \frac{\rho_s^*}{(r^*)^2} dS}{\oint \frac{dS}{(r^*)^3 t}} \int_0^s \frac{dS}{(r^*)^3 t} & (\text{閉断面}) \end{cases} \qquad (14)$$

S_cはC点のS座標。添字cはC点での量を表わす。(11)を(13)に代入しさらに(7)に代入することによって変位Wは最終的に次のように表わされる。

$$W = W_c + (W_c - u_s' x_s/r_s - v_s' y_s/r_s)(y/r_c) - u_s' x/r_s - v_s' y/r_s - (\Omega(s) - \Omega(S_c) + r_s \rho_n n/r^*)(u_s'/r_s^2 + \beta_s'/r_s) \qquad (15)$$

(15)は仮定(1)〜(3)のもとで可能な変位場を表わしている。(15)を(1)に代入すると、この仮定のもとでの一次元のひずみ－変位関係が次のように表わされる。

$$\epsilon_\theta = [W_c' + v_s - \beta_s x_s + (W_c' - u_s'' x_s/r_s - v_s'') - x(u_s''/r_s - \beta_s'') - (\Omega(s) - \Omega(S_c) + r_s \rho_n n/r^*)(u_s''/r_s^2 + \beta_s''/r_s)]/r \qquad (16)$$

$$\gamma_{s\theta} = -\left\{(1 + t/r^*)(1 + \rho_n m/r^*)n - (r/r^*)^2\left[\oint \frac{\rho^*}{(r^*)^2} ds \Big/ \oint \frac{ds}{(r^*)^3 t}\right]\Big/(r^* t)\right\}(r_s/r)(u_s'/r_s^2 + \beta_s'/r_s) \qquad (17)$$

残りの4つのひずみ成分は全て0である。

3. つり合い式と境界条件

ひずみ成分のうちϵ_θ, $\gamma_{s\theta}$以外は全て0であるゆえ、仮想仕事式は次のように書かれる。

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_A (\sigma_\theta \delta\epsilon_\theta + \tau_{s\theta}\delta\gamma_{s\theta})\, r\, dA\, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_A (P_{xd}\delta u + P_{yd}\delta v + P_{\theta d}\delta w)\, r\, dA\, d\theta + \left[\int_A \bar{\sigma}_\theta \delta w + \bar{\tau}_{s\theta}\delta\xi)\, dA\right]_{\theta_1}^{\theta_2} \qquad (18)$$

P_{xd}, P_{yd}, $P_{\theta d}$は単位面積、角度に働く分布外力のx, y, θ方向成分、上付きの横棒は両端θ_1, θ_2で断面に分布して働く外力を示す。(3),(5),(15),(16),(17)を用いて(18)を変形することにより、次のつり合い式、と境界条件式が求まる。

つり合い式

$$-N' - \frac{1}{r_c} M_x' = P_\theta + \frac{m_x}{r_c}, \quad -\frac{x_s}{r_c r_s} M_x'' - \frac{1}{r_s} M_y'' - \frac{1}{r_s^2} M_\beta'' - \frac{1}{r_s} T_{sv}' = P_x + \frac{x_s}{r_c r_s} m_x' + \frac{1}{r_s} m_y' + \frac{1}{r_s^2} m_\beta'$$

$$N - \frac{1}{r_c} M_x'' = P_y + \frac{1}{r_c} m_x', \quad -x_s N + M_y - \frac{1}{r_s} M_\beta'' - T_{sv}' = m_t + \frac{1}{r_s} m_\beta' \qquad (19)$$

境界条件

$$W_c = C_1 \ \text{あるいは}\ N + \frac{M_x}{r_c} = \bar{N} + \frac{\bar{M}_x}{r_c}, \quad u_s = C_2 \ \text{あるいは}\ \frac{x_s}{r_c r_s} M_x' + \frac{1}{r_s} M_y' + \frac{1}{r_s^2} M_\beta' + \frac{1}{r_s} T_{sv} = \bar{Q}_x$$

$$V_s = C_3 \ \text{〃}\ \frac{1}{r_c} M_x' = \bar{Q}_y, \quad \beta_s = C_4 \ \text{〃}\ \frac{1}{r_s} M_\beta' + T_{sv} = \bar{T} \qquad (20)$$

$$V_s' = C_5 \ \text{〃}\ M_x = \bar{M}_x, \quad u_s' = C_6 \ \text{〃}\ \frac{x_s}{r_c} M_x + M_y + \frac{M_\beta}{r_s} = \frac{x_s}{r_c} \bar{M}_x + \bar{M}_y + \frac{\bar{M}_\beta}{r_s}$$

$$\beta_s' = C_7 \ \text{〃}\ M_\beta = \bar{M}_\beta$$

ここに $C_1 \sim C_7$ は定数を表わし、その他の記号は変分の過程で次のように定義されたものである。

$$N = \int_A \sigma_\theta \, dA, \quad M_x = \int_A \sigma_\theta y \, dA, \quad M_y = \int_A \sigma_\theta x \, dA, \quad M_\beta = \int_A \sigma_\theta \Omega \, dA, \quad Q_x = \int_A \tau_{s\theta} l \, dA$$

$$Q_y = \int_A \tau_{s\theta} m \, dA, \quad T = \int_A \tau_{s\theta} \rho_t \, dA, \quad P_x = \int_A P_{xd} \, dA, \quad P_y = \int_A P_{yd} \, dA, \quad P_\theta = \int_A P_{\theta d} \, dA$$

$$m_x = \int_A P_{\theta d} y \, dA, \quad m_y = \int_A P_{\theta d} \, dA, \quad m_\beta = \int_A P_{\theta d} \Omega \, dA, \quad m_t = \int_A [P_{yd}(x - x_s) - P_{xd}(y - y_s)] \, dA \qquad (21)$$

$$T_{sv} = \frac{\oint \frac{\rho_s^*}{(r^*)^2} ds}{\oint \frac{ds}{(r^*)^3 t}} \oint \tau_{s\theta} \left(\frac{r}{r^*}\right)^2 \frac{ds}{r^*} - \iint_A \tau_{s\theta} \left(2 + \frac{l n}{r^*}\right)\left(1 + \frac{\rho_n m}{r^*}\right) n \, dn \, ds$$

開断面に対しては T_{sv} の第1項は0となる。薄肉断面部材で $n \ll r^*$ と考えてよいときには T_{sv} 中の $r/r^* = 1$ となり、又第2項は簡単化され $\iint_A 2\tau_{s\theta} n \, dn \, ds$ と表わされる。

4、力と変化の関係

(16)、(17)式のひずみに E, G を乗じ(21)式に代入すると、力と変位の関係が求まる。x, y 座標の原点 C, S 座標の原点 O, 変位の参照点 S (x_s, y_s) は任意の点に選んだが、これらの点を

$$\int_A \frac{x}{r} dA = 0, \quad \int_A \frac{y}{r} dA = 0, \quad \int_A \frac{\Omega}{r} dA = 0, \quad \int_A \frac{\Omega x}{r} dA = 0, \quad \int_A \frac{\Omega y}{r} dA = 0 \qquad (22)$$

を満たすように選ぶと、力と変位の関係式が簡単になる。(22)の1, 2式は C を定め、3式は O を、4, 5式は S を定める。(22)を満たすように座標原点を選んだ時、力ー変位関係は次のように表わされる。

$$N = (W_c' + V_s - x_s \beta_s) EA/r_c, \quad M_\beta = -(u_s''/r_s^2 + \beta_s''/r_s) EI_\Omega/r_c, \quad T_{sv} = (u_s'/r_s + \beta_s') GJ/r_c \qquad (23)$$

$$M_x = -[(u_s'' x_s/r_s + V_s'' - W_c') I_x/r_c + (u_s''/r_s - \beta_s) I_{xy}] E/r_c, \quad M_y = [(u_s'' x_s/r_s + V_s'' - W_c') I_{xy}/r_c + (u_s''/r_s - \beta_s) I_y] E/r_c$$

ここに

$$A = \int_A dA, \quad I_x = r_c \int_A \frac{y^2}{r} dA, \quad I_y = r_c \int_A \frac{x^2}{r} dA, \quad I_{xy} = r_c \int_A \frac{xy}{r} dA, \quad I_\Omega = r_c \int_A \frac{\Omega^2}{r} dA$$

$n \ll r^*$ のとき

$$J = G r_c \left[\left(\oint \frac{\rho_s^*}{(r^*)^2} ds\right)^2 \Big/ \left(\oint \frac{ds}{(r^*)^3 t}\right) - \int_s \frac{t^3}{3r} ds \right] \qquad (24)$$

5、結語

円弧曲線ばりの基礎方程式を導く一つの方法として、変分原理を用い、つり合い式、境界条件、力ー変位関係を求めた。仮定としては比較的簡単なもののみを用い、あとは全て数学的な演算にたより、幾何学的な考察をさけた。ここで得られた結果を開断面に適用すると、文献(1)の結果と一致する。又開断面に対するサンブナンのねじり定数は文献(2)の結果と一致する。

6. 文献リスト

(1) 小西, 小松,「薄肉曲線桁の基礎理論」土木学会論文集 87号, (2) 倉西,「一般薄肉曲りばりの解析」土木学会論文集 108号 (3) 深沢,「薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎理論」土木学会論文集 110号, (4) 事口, 中井,「変形を考慮した曲線部材の力学的性状に関する基礎的研究」土木学会年次学術講演会概要集, 昭和47年