I-171　せん断場を用いた箱型トラス梁の有限変位解析

○ 東京大学　学生員　倉方慶夫
東京大学　正　員　西野文雄
東京大学　正　員　奥村敏恵

1. まえがき

トラス橋では、断面形保持のために原則として対傾構を設けることになっているが、断面空間の大きい事を利用した二階建トラス橋や一般下路トラス橋では、対傾構の剛性は低いものとなるし、また美観上から対傾構を省略する傾向にあり、支間の長大化につれ断面形状によっては、座屈安定上の問題が起こりうると考えられる。箱型トラスの横倒れ座屈に関しては、トラスを薄肉梁へ置換し、二次せん断変形を無視、断面形不変としたいわゆる一般そりねじり理論による検討[1]があるが、ここでは対傾構の剛性を問題とするので、断面の変形を考慮し、またトラス橋では腹材の変形が比較的大きいので二次せん断変形も考慮し、横倒れ座屈へ応用する前の段階として、一般荷重に対する有限変位としての基本方程式を導く。

2. 前提と仮定

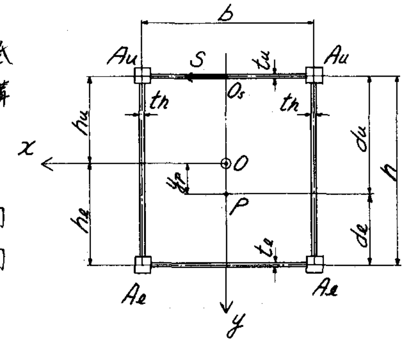
a). 主構の腹材と上下横構は、それらの面内のせん断変形にだけ抵抗する板場（せん断場）に置換しうる。（以後、主構腹材と上下横構を単に腹材という。）

b). 対傾構も同様にせん断場に置換しうるとするが、その間隔は支間に比べ細かく配置されているものとし、対傾構応力は梁の軸方向に沿って分布する応力として取扱いうる。（ここでは断面の横断方向の変形に抵抗するように組まれた構造系を総称して対傾構という。）

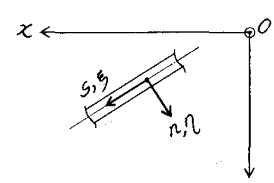
c). 断面は一定で、一軸対称矩形断面とする。（図-1）

d). 変形後も弦材間の距離は変化しない。

e). 右手系座標 (x, y, z) を用い、それぞれの方向の変位を (u, v, w) と表わす。さらに腹材中心線に沿って s 座標を設け、それと直交する方向の座標を n とし、それぞれの方向の変位を ξ, ζ と表わす。（図-2）



（図-1）横断面諸元と記号



（図-2）sn 座標

f). 実際の問題を扱う範囲では、有限変位といえども変位はそれほど大きくないので、ひずみ成分の表示において一次の項で現われたものは二次の項で省略しうる。さらに u, v に比べ w は小さいので w に関する二乗項を無視すると、有限変位ひずみ成分は次のように表わされる。[2]

$$\left.\begin{aligned}
&\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

g). 有限変位が問題となるような寸法の梁では、せん断変形はそれほど重要な因子には実際上はならないので非線形なせん断ひずみ成分を無視して、腹材（せん断場）のひずみ成分を次のように表わす。[3]

$$\gamma_{sz} = \frac{q_0(z)}{G t(s)} + l C_1(z) + m C_2(z) + \rho_p C_3(z) + \rho_p^* C_4(z) \tag{2}$$

（註；一般そりねじり理論では、$C_i(z) = 0,\ i = 1 \sim 4$，とされる。）

ここに，t；腹板換算せん断場の板厚，であり，l, m, ρ_p, ρ_p^*については，(5)，(7)式による。

3. x, y方向変位 u, v

前提から　$\epsilon_x = 0$，$\epsilon_y = 0$，$\gamma_{xy} = 2\alpha(z)$，$\varphi(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$　(3)

ここに，2α；対傾構置換せん断場のせん断ひずみ，　φ；断面の剛体的回転変位

点$P(x_p, y_p)$でのx, y方向変位をu_p, v_pとすると，(1)，(3)式より，

$$u = u_p + (\alpha-\varphi)(y-y_p) - \frac{1}{2}(\alpha+\varphi)^2(x-x_p), \quad v = v_p + (\alpha+\varphi)(x-x_p) - \frac{1}{2}(\alpha-\varphi)^2(y-y_p) \tag{4}$$

方向余弦　$l = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}$，$m = \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial n}$，を用いて，　(5)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= ul + vm = u_p l + v_p m + \varphi\rho_p + \alpha\rho_p^* - \frac{1}{2}(\alpha^2+\varphi^2)\rho_{pn} - \alpha\varphi\rho_{pn}^* \\ \eta &= vl + um = -u_p m + v_p l + \varphi\rho_{pn} + \alpha\rho_{pn}^* + \frac{1}{2}(\alpha^2+\varphi^2)\rho_p + \alpha\varphi\rho_p^* \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ここに，
$$\left.\begin{aligned} \rho_p &= (x-x_p)m - (y-y_p)l, \quad \rho_{pn} = (x-x_p)l + (y-y_p)m \\ \rho_p^* &= (x-x_p)m + (y-y_p)l, \quad \rho_{pn}^* = (x-x_p)l - (y-y_p)m \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

4. z方向変位 w

(1)式と同様に，腹板のせん断ひずみは，$\gamma_{sz} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial s}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial z}$　(8)

(8)式に(2)，(6)式を代入し，変位の3次以上の積を無視して，sについて積分する。このとき閉断面であるから，変位wの連続条件 $w(s) = w(s+\oint ds)$を用いると，$\oint \rho_p^* ds = 0$であるから次式をうる。

$$\gamma_0 = -(C_3-\varphi')\frac{2F}{\frac{1}{G}\oint\frac{ds}{t}}, \quad 2F = \oint \rho_p\, ds \tag{9}$$

よって，
$$w = C(z) + \{C_1 - u_p' - v_p'(\alpha+\varphi)\}x + \{C_2 - v_p' - u_p'(\alpha-\varphi)\}y + (C_3-\varphi')\omega_p + (C_4-\alpha')\omega_p^* \tag{10}$$

ここに，
$$\omega_p = \int_0^s(\rho_p - \tilde{\tau})ds, \quad \tilde{\tau} = \frac{2F}{\oint\frac{ds}{t}}\cdot\frac{1}{t}, \quad \omega_p^* = \int_0^s \rho_p^* ds \tag{11}$$

ω_p^*は，問題とする腹板中心線上において，C, x, y, ω_pに一次従属しているので

$$\omega_p^* = k_1 + k_2 x + k_3 y + k_4\omega_p, \quad k_i = const., \text{ と表わし，} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} w_0(z) &= C + k_1(C_4-\alpha'), \quad \psi_y(z) = -\{C_1 + k_2(C_4-\alpha') - u_p'\} \\ \psi_x(z) &= -\{C_2 + k_3(C_4-\alpha') - v_p'\}, \quad \theta = -\{C_3 + k_4(C_4-\alpha') - \varphi'\} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

とおくと，腹板中心線上でのz方向変位wは，

$$w = w_0 - \{\psi_y + v_p'(\alpha+\varphi)\}x - \{\psi_x + u_p'(\alpha-\varphi)\}y - \theta\omega_p \tag{14}$$

5. 釣合式

$\bar{p}_z, \bar{p}_s$；z, s方向の外力，$\bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{sz}$；端断面($z = z_1, z_2$)に働く応力

A；弦材断面積，A_s；腹板断面積，$dA_s = t\,ds$，とするとき仮想仕事；

$$\int_{z_1}^{z_2}\left[\int_A \sigma_z\delta\epsilon_z dA + \int_{A_s}\tau_{sz}\delta\gamma_{sz}dA_s + \int_F \tau_{xy}\delta\gamma_{xy}dF\right]dz$$
$$= \int_{z_1}^{z_2}\left\{\int_A \bar{p}_z\delta w\, dA + \int_{A_s}\bar{p}_s\delta\xi\, dA_s\right\}dz + \left[\int_A \bar{\sigma}_z\delta w\, dA + \int_{A_s}\bar{\tau}_{sz}\delta\xi\, dA_s\right]_{z_1}^{z_2} \tag{15}$$

を計算することによって，次の釣合の基本方程式をうる。

$$\frac{dN}{dz} + p_z = 0 \ (a), \quad \frac{dM_y}{dz} - Q_x + m_y = 0 \ (b), \quad \frac{dM_x}{dz} - Q_y + m_x = 0 \ (c) \tag{16}$$

(次ページに続く)

$$-\frac{d}{dz}\left[N\left\{u_p'-(\alpha'-\varphi')y_p\right\}\right]+\frac{d^2}{dx^2}\left\{M_x(\alpha-\varphi)\right\}-\frac{dQ_x}{dz}-\left[p_x+\frac{d}{dz}\left\{m_x(\alpha-\varphi)\right\}\right]=0 \quad (d)$$

$$-\frac{d}{dz}\left[N\left\{v_p'-(\alpha'-\varphi')x_p\right\}\right]+\frac{d^2}{dx^2}\left\{M_y(\alpha+\varphi)\right\}-\frac{dQ_y}{dz}-\left[p_y+\frac{d}{dz}\left\{m_y(\alpha+\varphi)\right\}\right]=0 \quad (e)$$

$$-M_x u_p''-M_y v_p''+\frac{d}{dz}\left\{N(u_p'y_p+v_p'x_p)-B_x(\alpha'-\varphi')-B_y(\alpha'+\varphi')\right\}-\frac{dM_Q}{dz}+2\tau_{xy}F+(m_x u_p'+m_y v_p'$$

$$-m_Q+m_{Tn}\alpha+m_{Qn}\varphi=0 \quad (f), \quad M_x u_p''-M_y v_p''-\frac{d}{dz}\left\{N(u_p'y_p-v_p'x_p-B_x(\alpha'-\varphi')+B_y(\alpha'+\varphi')\right.$$

$$-\frac{dT_p}{dz}-(m_x u_p'-m_y v_p'+m_T-m_{Qn}\alpha-m_{Tn}\varphi)=0 \quad (g), \quad \frac{dM_\omega}{dz}-T_\omega+m_\omega=0 \quad (h) \qquad (16)$$

ここに，$N=\int_A \sigma_z\,dA$，$M_x=\int_A \sigma_z y\,dA$，$M_y=\int_A \sigma_z x\,dA$，$B_x=\int_A \sigma_z (y-y_p)^2 dA$

$B_y=\int_A \sigma_z (x-x_p)^2 dA$，$M_\omega=\int_A \sigma_z \omega_p\,dA$，$Q_x=\int_A \tau_{sz} l\,dA_s$，$Q_y=\int_A \tau_{sz} m\,dA_s$，$T_p=\int_{A_s}\tau_{sz}\rho_p\,dA_s$ (17)

$T_s=\int_{A_s}\tau_{sz}\tilde{\tau}\,dA_s$，$M_Q=\int_{A_s}\tau_{sz}\rho_p^*\,dA_s$，$T_\omega=T_p-T_s$

$p_z=\int_A \bar{p}_z\,dA$，$m_x=\int_A \bar{p}_z y\,dA$，$m_y=\int_A \bar{p}_z x\,dA$，$m_\omega=\int_A \bar{p}_z \omega_p\,dA$，$p_x=\int_{A_s}\bar{p}_s l\,dA_s$

$p_y=\int_{A_s}\bar{p}_s m\,dA_s$，$m_T=\int_{A_s}\bar{p}_s\rho_p\,dA_s$，$m_{Tn}=\int_{A_s}\bar{p}_s\rho_{pn}\,dA_s$，$m_Q=\int_{A_s}\bar{p}_s\rho_p^*\,dA_s$，$m_{Qn}=\int_{A_s}\bar{p}_s\rho_{pn}^*\,dA_s$ (18)

xy座標を定め，Sの原点およびx_p, y_pを決めるのに次の条件を用いると便利である。

$$\int_A x\,dA=0, \quad \int y\,dA=0, \quad \int_A xy\,dA=0$$
$$\int_A \omega_p\,dA=0, \quad \int_A x\omega_p\,dA=0, \quad \int_A y\omega_p\,dA=0 \qquad (19)$$

各部材の応力は，次式で表わされる。

$$\sigma_z=E\epsilon_z, \quad \tau_{sz}=G\gamma_{sz}, \quad \tau_{xy}=G_p\gamma_{xy} \qquad (20)$$

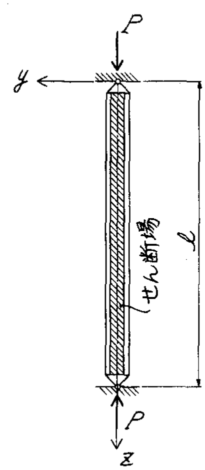
G_p；対傾構置換せん断場のせん断弾性係数

6. 応用例；せん断変形を考慮した柱の曲げ座屈（$\alpha=\varphi=\theta=0$），（図-3）

(16)式の(c)，(e)より，$M_x'-Q_y=0$，$Pv_p''-Q_y'=0$ (21)

σ_zを線形化し，次のσ_zとτ_{sz}を用いる。

$$\sigma_z=E\left\{w_0'-\psi_y'x-\psi_x'y-\theta'\omega_p\right\}$$
$$\tau_{sz}=G\left\{(u_p'-\psi_y)l+(v_p'-\psi_x)m+\varphi'\rho_p-\theta(\rho_p-\tilde{\tau})+\alpha'\rho_p^*\right\} \qquad (22)$$



（図-3）

(17)，(19)，(22)式から

$$M_x=-EI_x\psi_x', \quad Q_y=GJ_y(v_p'-\psi_x), \quad I_x=\int_A y^2 dA, \quad J_y=\int_{A_s} m^2 dA_s \qquad (23)$$

よって $v_p^{IV}+\frac{GJ_y}{EI_x}\cdot\frac{P}{(GJ_y-P)}v_p''=0$ から $P_{cr}=EI_x\frac{\pi^2}{l^2}\cdot\frac{1}{1+EI_x\frac{\pi^2}{l^2}\frac{1}{GJ_y}}$ (24)

これは，文献4)の結果などと一致する。

（参考文献）

1). 深沢，"トラス橋の横倒れ座屈について" 東大橋梁研究室報告 106 1962

2). F. Nishino, C. Kasemset and S.L. Lee, "Variational Formulation of Stability Problems for Thin-walled Members" in preparation

3). 本年次講演会 I-29，倉方，藤井，"箱型トラスのねじり解析について"

4) Timoshenko and Gere, "Theory of Elastic Stability" P 137 など

5) C.F. Kollbrunner und N. Hajdin, "Dünnwandige Stäbe" Springer-Verlag 1972.