

I-165 断面変形を考慮した薄肉開断面部材の安定問題

早稲田大学 正員 平嶋 政治
早稲田大学 学生員 ○依田 照彦

1. まえがき

土木構造物の薄肉化に伴い、構造物の安定性に対する配慮の重要性が増しており、安定性を保持するための補剛材についてもいろいろと検討されて来ている。しかし補剛材の効果を定量的に評価することは一般に難しく、各種の座屈形式に対する補剛材の統一的な設計法も完全に確立されたとは言い難い。ここでは補剛材の効果を考慮できるように、従来の剛断面理論を拡張し、断面変形を考慮した安定問題の解析を試みた。一例として理論式の誘導を溝断面部材について実行し、曲げ荷重を受けている梁について数値計算を行い、断面変形の影響を検討した。

2. 理論解析

構造物が等方等質な弾性体より構成されていると仮定すると、弾性論の基礎方程式：

- i) 静力学的つり合い方程式
- ii) 幾何学的方程式 (ひずみと変位との関係)
- iii) 物理的方程式 (応力とひずみとの関係)

を利用し得る。これらの方程式の個数は未知数の個数に等しいので、数学的には自然境界条件(幾何学的境界条件・力学的境界条件)を満たすような解が存在するはずである。しかし実際には、構造物の内部に於いて上述の基礎方程式を満たし、その表面全体について境界条件を満たすような解を見出すことは、最も簡単な問題でさえ容易でない。そこで構造物の幾何学的特性を考慮し、境界条件を工学的許容誤差範囲

以内で理想化すると、問題を工学的に解決することができる。今、問題の解析に対する基本的未知量として各点の変位を取ると、幾何学的方程式よりそれに対応するひずみが求まり、物理的方程式を用いて応力についても変位で表わせる。それ故、つり合い方程式は変位で表現でき、この方程式を変位と関係づけた境界条件の下で解けば、変位が求まる。具体的に説明すれば、構造物の幾何学的特徴を生かし、数学的処理を容易にするために、変位成分を変数分離形で

$$u(x, z, s, n) = \sum_{i=1}^m U_i(z) \Phi_i(s, n), \quad v(x, z, s, n) = \sum_{k=1}^n V_k(z) \Psi_k(s, n), \quad w(x, z, s, n) = \sum_{p=1}^t W_p(z) \omega_p(s, n) \quad (1)$$

と表わし、ガレルキン法を用いることにより つり合い方程式を

$$\int_F \left\{ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{zn}}{\partial n} + Z \right\} \Phi_j dF = 0, \quad (j=1, \dots, m); \quad \int_F \left\{ \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{sn}}{\partial n} + S \right\} \Psi_h dF = 0, \quad (h=1, \dots, n)$$

$$\int_F \left\{ \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_n}{\partial n} + N \right\} \omega_q dF = 0, \quad (q=1, \dots, t) \quad (2)$$

(($\int_F dF$ は考察断面上の積分を示す。))

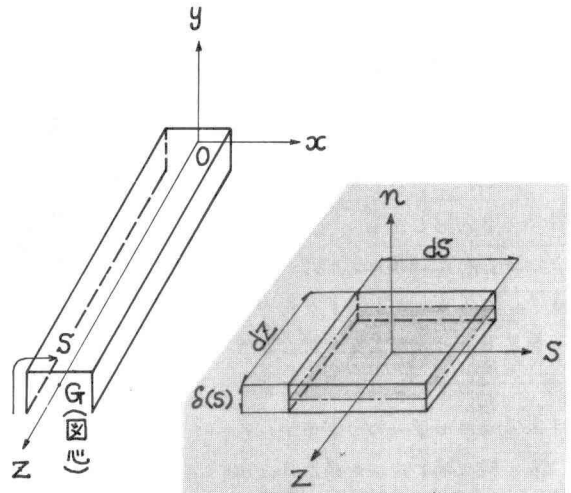


図-1 梁の一般図

と表現する。さらに幾何学的境界条件に加えて力学的境界条件として

$$P_j(z) = \int_F \sigma_z \bar{\Psi}_j dF, \quad (j=1, \dots, m); \quad Q_h(z) = \int_F \tau_{zs} \bar{\Psi}_h dF, \quad (h=1, \dots, n); \quad \text{etc.} \quad (3)$$

を導入する。以上の一般的な方法を、構造物の幾何学的及び力学的特性を考慮して、適宜修正すると、与えられた荷重状態に対する構造物の応答を知ることができる。

3. 溝型断面部材についての計算例

溝型部材を三つの板より構成されている梁と考えると、各板についてはその幾何学的特性より \$n\$ 方向の応力を省略できる。(図-1参照) この仮定より、任意点での \$z\$ 方向、\$S\$ 方向、\$n\$ 方向の変位は、各板の中央面を \$n\$ 方向の原点とすれば、それぞれ次の様に表わせる。

$$u(z, S, n) = \bar{u}(z, S) - n \frac{\partial \bar{w}(z, S)}{\partial z}, \quad v(z, S, n) = \bar{v}(z, S) - n \frac{\partial \bar{w}(z, S)}{\partial S}, \quad w(z, S, n) = \bar{w}(z, S). \quad (4)$$

(\$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\$ は中央面上の値を示す。)

\$z\$ 方向の \$\bar{w}(z, S)\$ の変化は微小で無視し得ると仮定し、変位成分を

$$u(z, S, n) = U_i(z) \bar{\Psi}_i(S, n) = U_i(z) \varphi_i(S), \quad (i=1, \dots, m; \quad k=1, \dots, n) \quad (5)$$

$$v(z, S, n) = V_k(z) \bar{\Psi}_k(S, n) = V_k(z) [\psi_k(S) - n \frac{\partial w_k(S)}{\partial S}] \quad (\text{但し, } \Sigma \text{ 記号は省略してある。})$$

と書き表わす。つり合い方程式を \$z\$ 軸方向の単位幅 \$dz\$ について考慮すれば、(2)式は

$$\int_F \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \bar{\Psi}_j dF - \int_F \tau_{zs} \bar{\Psi}_j dF + \int_L P \bar{\Psi}_j dS = 0, \quad (j=1, \dots, m); \quad \int_F \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial z} \bar{\Psi}_h dF - \int_F \sigma_s \bar{\Psi}_h dF + \int_L Q \bar{\Psi}_h dS = 0, \quad (h=1, \dots, n) \quad (6)$$

と書き直せる。(但し、\$P, Q\$ はそれぞれ \$z\$ 方向及び \$S\$ 方向の表面力であり、\$\int_L dS\$ は \$S\$ 方向の線積分を示す。)

従って、(6)式より

$$E a_{ij} U_i'' + \mu E D_{kj} V_k' - G r_{bij} U_i - G r_{Ckj} V_k' + P_j = 0, \quad (j=1, \dots, m) \quad (7)$$

$$G r_{Cih} U_i' + G r_{Rih} V_k'' + G r_{Tkh} V_k'' - E X_{kh} V_k - \mu E Y_{ih} U_i' - E S_{kh} V_k + q_h = 0, \quad (h=1, \dots, n) \quad (7)$$

を得る。ここに $a_{ij} = \int_F \varphi_i \varphi_j dF, D_{kj} = \int_F \psi_k \psi_j dF, b_{ij} = \int_F \varphi_i \psi_j dF, c_{kj} = \int_F \psi_k \psi_j dF, P_j = \int_L P \varphi_j dS, C_{ih} = \int_F \varphi_i \psi_h dF,$
 $r_{kh} = \int_F \psi_k \psi_h dF, T_{kh} = \int_F n^2 \bar{w}_k \bar{w}_h dF, X_{kh} = \int_F \psi_k \psi_h dF, Y_{ih} = \int_F \varphi_i \psi_h dF, S_{kh} = \int_F n^2 \bar{w}_k \bar{w}_h dF, q_h = \int_L Q \psi_h dS,$
 $' = \frac{\partial}{\partial S}, '' = \frac{\partial^2}{\partial S^2}. \quad (8)$

そこで横方向曲げ荷重を受けている溝型部材の横倒れ座屈を考える。(図-2参照) 剛断面理論と比較するため、(5)式の既知函数として、\$\varphi_1=1, \varphi_2=y(s), \varphi_3=x(s), \varphi_4=\omega(s), \psi_1=0, \psi_2=\dot{y}(s), \psi_3=\dot{x}(s), \psi_4=h(s), (m=n=4)^*\$ を選り、\$w_k(s)\$ を板の接合線上では隣接する板の相対的角変化はないという条件から定めると、横倒れ座屈問題に対する微分方程式

$$-E J_w \left\{ 1 - \frac{T_{44}}{C_{44}} \right\} \theta^{iv} + G r_{T44} \left\{ 1 - \frac{E J_w}{G r_{T44}} \frac{E S_{44}}{G r_{C44}} \right\} \theta'' + \frac{M_c^2}{E J_x} \theta = 0 \quad (9)$$

(\$\theta\$ はねじり角)

を得る。但し、\$E J_w\$: 曲げねじり剛性、\$E J_x\$: \$z\$ 軸まわりの曲げ剛性、である。

両端の境界条件を、\$\theta=0; \theta''=0\$ とすれば、限界座屈荷重 \$M_c\$ は

$$|M_c| = \frac{\pi \sqrt{E J_x G r_{Jd}}}{l} \sqrt{1 + \frac{E J_w}{G r_{Jd}} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + V_a} \quad (G r_{Jd}: \text{ねじり剛性}) \quad (10)$$

となる。ここに \$V_a\$ は断面変形の影響による項であり、次式のようになる。

$$V_a = \frac{T_{44} - J_d}{J_d} - \frac{E J_w}{G r_{Jd}} \frac{E S_{44}}{G r_{C44}} - \frac{E J_w}{G r_{Jd}} \frac{T_{44}}{C_{44}} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2. \quad (11)$$

4. あとがき

補剛材の効果とを正當に評価するための第一段階として、断面変形を考慮した安定問題の解析を試みた。ここでは理論の応用を曲げ荷重を受ける溝型部材の横倒れ座屈問題に限定し、数値計算を行った。その結果、特に不均衡な幾何学的特性を持つ溝型部材でない限り、断面変形の影響は10%以下であることを確かめた。今後、他の構造物あるいは他の荷重状態に対して断面変形の影響を調べ、補剛材の設計法について考察してゆきたい。

* 参考文献 V. Z. ウラソフ著、奥村敏恵外共訳：薄肉弾性ばりの理論、技報堂、1967年。

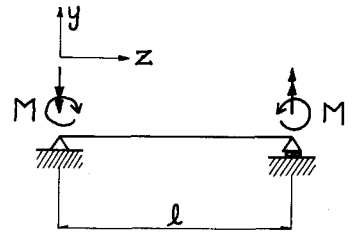


図-2 横倒れ座屈