

[I] 一般的方法: 面外及び面内変位を次のように表わす

$$\left. \begin{aligned} u(z, s) &= \sum_i U_i(z) \cdot \varphi_i(s) && \text{(縦方向変位)} \\ v(z, s) &= \sum_k V_k(z) \cdot \psi_k(s) && \text{(横方向接線変位)} \\ w(z, s) &= \sum_k V_k(z) \cdot \phi_k(s) && \text{(横方向垂直変位)} \\ \theta(z, s) &= \sum_k V_k(z) \cdot \psi'_k(s) && \text{(回転角)} \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} M(z, s) &= -E \cdot J_z(s) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \sum_k V_k(z) \cdot M_k(s) && \text{(縦方向単位長さ当りの横方向曲げモーメント)} \\ Hk(z, s) &= G \cdot J_d(s) \frac{\partial \theta}{\partial z} = G \cdot J_d(s) \cdot \sum_k V'_k(z) \cdot \psi'_k(s) = \sum_k V'_k(z) \cdot Hk_k(s) && \text{(横方向単位長さ当りの Saint-Venant のねじりモーメント)} \\ \sigma(z, s) &= E \frac{\partial u}{\partial z} = E \sum_i U'_i(z) \cdot \varphi_i(s) && \text{(横方向単位面積当りの垂直応力) のねじりモーメント} \\ \tau(z, s) &= G \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = G \left[ \sum_i U'_i(z) \cdot \varphi'_i(s) + \sum_k V'_k(z) \cdot \psi_k(s) \right] && \text{(単位面積当りのせん断応力)} \end{aligned} \right\} (2)$$

ただし  $J(s) = \frac{\delta^3(s)}{12}$ ,  $J_d(s) = \frac{\alpha}{3} \delta^3(s)$ , ( $\delta(s)$ : 肉厚) (3)

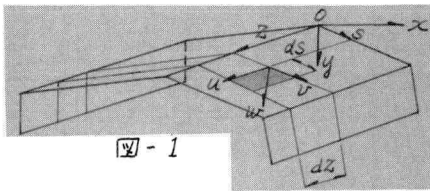


図-1

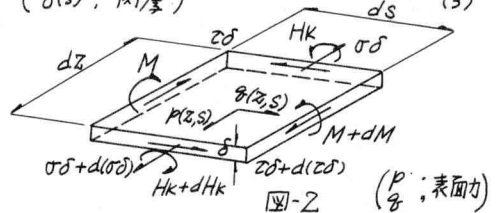


図-2 (p\_z: 表面力)

an elementary transverse strip の力の釣合を仮想変位の原理より求めると、(m+n) の未知関数  $U_i(z)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ),  $V_k(z)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) に対して、(m+n) の 2 階の微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \int_F \frac{\partial \sigma}{\partial z} \varphi_j dF - \int_F \tau \varphi'_j dF + \int_L p \varphi_j ds &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \\ \int_F \frac{\partial \tau}{\partial z} \psi_h dF - \sum_k V_k \int_L \frac{M_k \cdot M_h}{E \cdot J} ds + \sum_k V_k \int_L Hk_k \cdot \psi'_h ds + \int_L \delta \cdot \psi_h ds &= 0 \quad (h=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} (4)$$

◎幾何学境界条件  $U_i(z)$ , ( $i=1, 2, \dots, m$ ),  $V_k(z)$ , ( $k=1, 2, \dots, n$ )

◎力学的境界条件  $P_j(z) = \int_F \sigma \cdot \varphi_j dF$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ),  $Q_h = \int_F \tau \psi_h dF + \int_F Hk \psi'_h dF$  ( $h=1, 2, \dots, n$ )

[2] I 型断面 (=軸対称)

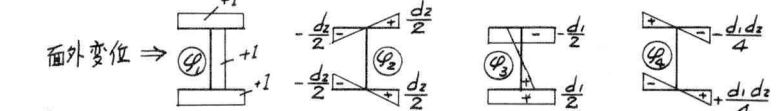
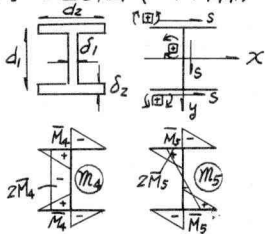
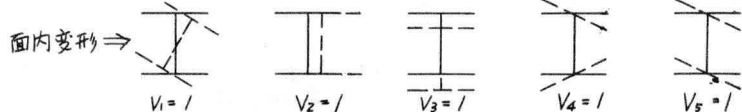


図-3



$\bar{M}_4$  と  $\bar{M}_5$  は、フランジとウェブの接合点で変形後も直角を保つという条件を用いて求められる。

$P_j = \int_L p \varphi_j ds$ ,  $Q_h = \int_L \delta \psi_h ds$  とおくと、次のような微分方程式を得る。

(i) 軸方向引張  $EF U_i'' + P_i = 0$  (5)

(ii) 02x 面内の曲げ  $EJ_y U_2'' + P_2' + Q_2 = 0, EJ_y V_2'' - Q_2 + \frac{E \cdot J_y}{2GF} Q_2'' - P_2' = 0$  (6)

(iii) 02y 面内の曲げ  $EJ_x U_3'' + P_3' + Q_3 = 0, EJ_x V_3'' - Q_3 + \frac{E \cdot J_x}{2GF} Q_3'' - P_3' = 0$  (7)

(iv) 断面変形 4  $GJ_s V_4'' - S_{44} V_4 = -Q_4$  =これを解くと。 (8)

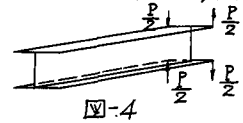
一般解  $V_4 = C_1 \cosh kZ + C_2 \sinh kZ + \bar{V}_4$  ( $\bar{V}_4$ : 荷重項) (9)

断面力  $Q_4(z) = \int_L Hk \cdot \bar{V}_4 ds = V_4' \int_L Hk_i \bar{V}_4 ds = 2GJ_{d_2} V_4' = 2GJ_{d_2} k (C_1 \sinh kZ + C_2 \cosh kZ + \bar{V}_4'/k)$  (10)

(例) 図-4のようにな荷重すると、境界条件は

$Z=0$ ;  $Q_4 = -d_2 P$ ,  $Z=L$ ;  $Q_4 = 0$  となり、

$V_4 = \frac{d_2 P}{2kGJ_{d_2}} \frac{\cosh k(L-Z)}{\sinh kL}$  (11)



(V) ねじりと断面変形5

$$\begin{aligned} EJ_w U_4'' - G b_{44} (U_4 - V_1') + P_4 &= 0 \\ -G b_{44} (U_4' - V_1'') + G J_d V_1'' + 2G J_{d_2} V_5'' + \theta_1 &= 0 \\ 2G J_{d_2} (V_1'' + V_5'') - S_{55} V_5 + \theta_5 &= 0 \end{aligned}$$
 (12)

ここで、 $P_4 = \theta_1 = \theta_5 = 0$  の場合について解くと、

$U_4 = U = f'$

$V_1 = \theta = - (EJ_w f'' / G b_{44}) + f$

$V_5 = \chi = \frac{E}{G} J_w \cdot A \cdot B \cdot f'' - B \cdot f + C_5' Z + C_6'$  とおける

$f'' - 2f^2 f'' + S^4 f = \frac{S^4}{B} (C_5' Z + C_6')$  水を解けば、

$f = C_1 \cosh dZ + C_2 \sinh dZ + C_3 \cosh \beta Z + C_4 \sinh \beta Z + \frac{C_5'}{B} Z + \frac{C_6'}{B}$

断面力  $P_4 = B_i = \int_F \sigma \varphi_4 dF = EJ_w f''$  ( $C_5 = \frac{C_5'}{B}$ ,  $C_6 = \frac{C_6'}{B}$  とおける)

$Q_1 = H = \int_F \tau \varphi_1 dF + \int_L Hk \bar{V}_4 ds = 2GJ_d C_5$

$Q_5 = H_\chi = \int_F \tau \varphi_5 dF + \int_L Hk \bar{V}_5 ds = 2GJ_{d_2} (V_1' + V_5')$

( $H_w = \int_F \tau \varphi_1 dF = -EJ_w f''' = -B_i'$ ) (14)

数値計算例 1) 部材寸法;  $d_1 = 20\text{cm}$ ,  $d_2 = 10\text{cm}$ ,  $d_1 = d_2 = 1\text{cm}$ ,  $L = 200\text{cm}$

境界条件;  $Z=0$ ;  $B_i = B_0$ ,  $\theta = 0$ ,  $H = 0$ ,  $H_w = 0$ ,  $Z=L$ ;  $B_i = 0$ ,  $H_w = 0$

断面剛の方法及びこの方法共に

$\sigma_{max} = \frac{d_1 d_2}{4} \frac{B_i}{J_w} = 50 \frac{B_i}{J_w}$

表-1 ( $\sigma_{max}$ )  $B_i/B_0$

	$Z=0$	$Z=50\text{cm}$	$Z=100\text{cm}$	$Z=150\text{cm}$	$Z=200\text{cm}$
この方法 $\frac{B_i}{B_0}$	1.000	0.450	0.166	0.061	0.000
剛断面法 $\frac{B_i}{B_0}$	1.000	0.488	0.2295	0.091	0.000

数値計算例 2)

部材寸法;  $d_1 = 20\text{cm}$ ,  $d_2 = 10\text{cm}$

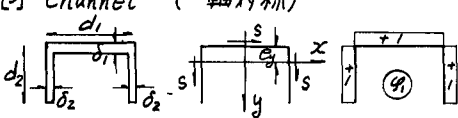
$d_1 = d_2 = 0.1\text{cm}$ ,  $L = 100\text{cm}$

境界条件; 1)に同じ

表-2 ( $\sigma_{max}$ )  $B_i/B_0$

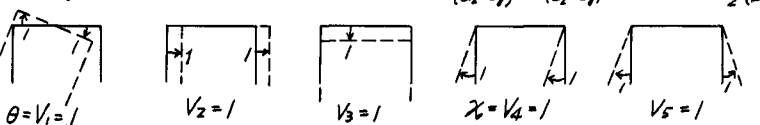
	$Z=0$	$Z=25\text{cm}$	$Z=50\text{cm}$	$Z=75\text{cm}$	$Z=100\text{cm}$
この方法 $\frac{B_i}{B_0}$	1.000	0.755	0.500	0.245	0.000
剛断面法 $\frac{B_i}{B_0}$	1.000	0.748	0.498	0.248	0.000

[3] Channel (-軸対称)



(x, y軸は主軸にとる)

図-5



← 面外変位

← 面内変形

ねじりと  $oxz$  面内の曲げと断面変形4以外は、I型断面と同様に解けるので省略する。

$Ea_{22} U_2'' - G b_{22} U_2 + E a_{24} U_4'' - G b_{24} U_4 - G b_{22} V_2' + P_2 = 0$

$E a_{24} U_2'' - G b_{24} U_2 + E a_{44} U_4'' - G b_{44} U_4 - G c_{41} \theta' - G b_{24} V_2' + P_4 = 0$

$G c_{41} U_4' + t c \theta'' + t_{14} \chi'' + \theta_1 = 0$

$G b_{22} U_2' + G b_{24} U_4' + G b_{22} V_2'' + \theta_2 = 0$

(15)

$$t_{14} \theta'' + t_{14} \chi'' - S_{44} \chi + \beta_4 = 0$$

$R_2 = P_4 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0$  の場合をとり扱おうと、次の式を得る。

$$A \cdot D f'' - \{ (A-1)E + B \cdot D \} f''' + F \cdot f' = -2E a_{24} C_4' + G b_{24} C_6' + G b_{44} C_3' + G b_{24} C_7' \quad (16)$$

$$f = C_1 \cosh \alpha Z + C_2 \sinh \alpha Z + C_3 \cosh \beta Z + C_4 \sinh \beta Z + C_5' + \frac{Z}{F} (-2E a_{24} C_4' + G b_{24} C_6' + G b_{44} C_3' + G b_{24} C_7')$$

$$\chi = f''$$

$$\theta = -f'' + \frac{S_{44}}{t_{14}} f \quad (2E a_{22} C_4' - G b_{22} C_6' - G b_{24} C_3' - G b_{22} C_7' = 0)$$

$$U_4 = A f''' - B f' + C_3'$$

$$U_2 = -\frac{a_{24}}{a_{22}} A f''' + \frac{a_{24}}{a_{22}} B f' + C_4' Z^2 + C_5' Z + C_6'$$

$$V_2 = \left( \frac{a_{24}}{a_{22}} - \frac{b_{24}}{b_{22}} \right) (A f'' - B f) - \frac{1}{3} C_4' Z^3 + \frac{1}{2} C_5' Z^2 + C_7' Z + C_8'$$

$$Q_2 = \int_F \tau \psi_2 dF = G b_{22} (C_6' + C_7') + G b_{24} C_3'$$

$$R_2 = M = \int_F \sigma \psi_2 dF = E a_{22} (2 C_4' Z + C_5')$$

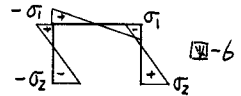
$$Q_1 = H = \int_F \tau \psi_1 dF + \int_L H_k \psi_1 ds = H_w + H_k = G C_{41} C_3'$$

$$Q_4 = H_\chi = \int_F \tau \psi_4 dF + \int_L H_k \psi_4 ds = 2G J d_2 \frac{S_{44}}{t_{14}} f'$$

$$R_4 = B_4^* = \int_F \sigma \psi_4 dF = E \{ (a_{44} - \frac{a_{24}^2}{a_{22}}) (A f'' - B f'') + a_{24} (2 C_4' Z + C_5') \}$$

数値計算例 1)  $d_1 = 20 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0.2 \text{ cm}$ ,  $L = 200 \text{ cm}$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} Z=0; \theta=0, \chi=0, U_2=0, U_4=0, V_2=0 \\ Z=L; \chi=0, U_4=0, Q_2=0, M=0, H=H_0 \end{cases}$$



こゝでこの方法、断面剛とした方法、其に

$$\sigma_1 = -37.5 \bar{\sigma}, \sigma_2 = 62.5 \bar{\sigma} \text{ とおける。}$$

表-3 丁

	Z=0	Z=50cm	Z=100cm	Z=150cm	Z=200cm
この方法 $\bar{\sigma} (\times H_0)$	-0.017142	-0.008571	0.000000	+0.008571	+0.017142
剛断面法 $\bar{\sigma} (\times H_0)$	-0.016638	-0.008225	0.000000	+0.008225	+0.016638

$Z=200 \text{ cm}$  のと3の回転中心  $(X_0, Y_0)$

$$\text{を求めると、 } X_0 = 0, Y_0 = \frac{V_2}{\theta} - e_y = -e_y - 3.75 + 0.0309 \text{ (cm)}$$

剛断面法によるせん断中心は、 $X_0' = 0, Y_0' = -e_y - 3.75 \text{ (cm)}$  となる。

又  $Z=200 \text{ cm}$  のと3の回転角  $\theta_{Z=200}$  は、 $\theta_{Z=200} = 121.4 \frac{H_0}{E}$  (この方法) ,

$$\theta_{Z=200}' = 110.25 \frac{H_0}{E} \text{ (剛断面法)} \text{ となる。}$$

数値計算例 2)  $d_1 = 20 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 1 \text{ cm}$ ,  $L = 200 \text{ cm}$

境界条件は 1) に同じ

表-4 丁

	Z=0	Z=50cm	Z=100cm	Z=150cm	Z=200cm
この方法 $\bar{\sigma} (\times H_0)$	-0.003428	-0.001714	0.000000	+0.001714	+0.003428
剛断面法 $\bar{\sigma} (\times H_0)$	-0.002058	-0.000792	0.000000	+0.000792	+0.002058

$Z=200 \text{ cm}$  のと3の回転角は、

$$\theta_{Z=200} = 24.28 \frac{H_0}{E} \text{ (この方法),}$$

$$\theta_{Z=200}' = 11.997 \frac{H_0}{E} \text{ (剛断面法)} \text{ となる。}$$

### 参考文献

- 1) V. Z. Vlasov, "Thin-walled Elastic Beams"
- 2) 白木小恒夫, "Die Berücksichtigung Der Querschnittsverformungen Bei Der Wölbkrafttorsion Von Dünnwandigen Trägern Mit offenem Profil"

第27回年次学術講演会講演概要集