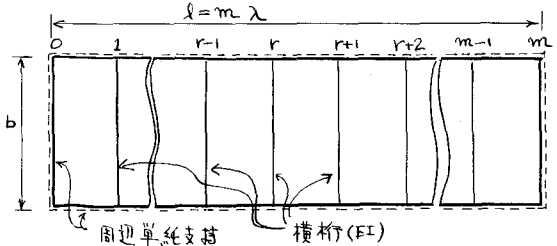


○北海道開発局, 網走開建 正員 吉田 純一
北海道大学土木工学科 正員 能町 純雄

1 はじめに: 連続長方形版についてはこれまで種々の研究がなされているが, ここでは図-1 に示すような, 横折で中間支持された任意径間直交異方性版について, x 方向にフーリエ級数に展開して, r 方向については横折位置での \tilde{w} と \tilde{w}' の差分方程式を誘導し, これをフーリエ定積分変換を用いて解析を進める。なお, 周辺は単純支持, 横折は剛度 EI で挟む場合について求める。

2. 単一版に関する関係式: 今図-1 のような m 径間連続直交異方性版の r 番目をとり出して図-2 のように, x, y 座標を定めると, x 方向の曲げ剛性が等しい時直交異方性版の微分方程式は

$$2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P \quad (1)$$

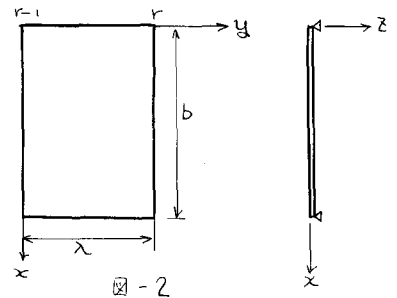


辺, $x=0, x=b$ で単純支持を考え, 式(1) を x に関

してフーリエ級数に展開すると

$$-\alpha_n^2 \tilde{w}_n'' + \tilde{w}_n'' = \frac{\tilde{F}_n}{D_y} \quad (2)$$

上式 中 $\alpha_n^2 = 2D_{xy}/D_y \cdot (\frac{n\pi}{b})^2$
 $\tilde{w}_n = \int_0^b w \sin \frac{n\pi x}{b} dx, \quad \tilde{F}_n = \int_0^b p \sin \frac{n\pi x}{b} dx$
 $\tilde{w}_n' = \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial y}$



式(2) を解いて, 各々の n を略すと

$$\tilde{w} = C_1 \sinh \alpha y + C_2 \cosh \alpha y + C_3 \alpha y + C_4 + \tilde{w}_p \quad (3)$$

上式中 \tilde{w}_p は式(2) の特解で 5 に示す, C_1, C_2, C_3 は $y=0, y=\lambda$ の境界条件を $y=0$ で $\tilde{w} = \tilde{w}_{r-1}, \tilde{w}' = -\tilde{M}_{r-1}/D_y, y=\lambda$ で $\tilde{w} = \tilde{w}_r, \tilde{w}' = -\tilde{M}_r/D_y$ とおくと

$$C_1 = -\frac{\tilde{M}_r - \tilde{M}_{r-1} \cosh \alpha \lambda}{D_y \alpha^2 \sinh \alpha \lambda}, \quad C_2 = -\frac{\tilde{M}_{r-1}}{D_y \alpha^2}, \quad C_3 = \frac{\tilde{M}_r - \tilde{M}_{r-1}}{D_y \alpha^2 \lambda} + \frac{\tilde{w}_r - \tilde{w}_{r-1}}{\alpha \lambda}, \quad C_4 = \tilde{w}_{r-1} + \frac{\tilde{M}_{r-1}}{D_y \alpha^2}$$

式(3) を一度微分して $y=0, y=\lambda$ におけるたわみ角を求める

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{r-1} &= \frac{1}{D_y \alpha} \left\{ \tilde{M}_r \left(\frac{1}{\alpha \lambda} - \frac{1}{\sinh \alpha \lambda} \right) - \tilde{M}_{r-1} \left(\frac{1}{\alpha \lambda} - \frac{\cosh \alpha \lambda}{\sinh \alpha \lambda} \right) \right\} + \frac{1}{\lambda} (\tilde{w}_r - \tilde{w}_{r-1}) + \tau_{r-1,r} \\ \tilde{\theta}_r &= \frac{1}{D_y \alpha} \left\{ \tilde{M}_r \left(\frac{1}{\alpha \lambda} - \frac{\cosh \alpha \lambda}{\sinh \alpha \lambda} \right) - \tilde{M}_{r-1} \left(\frac{1}{\alpha \lambda} - \frac{1}{\sinh \alpha \lambda} \right) \right\} + \frac{1}{\lambda} (\tilde{w}_r - \tilde{w}_{r-1}) + \tau_{r,r-1} \end{aligned} \quad (5)$$

同様に区間 (r-1, r) におけるせん断力 $\tilde{V}_y = -D_y \tilde{w}'' + 2D_{xy} \alpha^2 \tilde{w}'$ の両端 $y=0, y=\lambda$ における値は

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{r-1,r} &= \frac{\alpha}{\sinh \alpha \lambda} \left\{ \tilde{M}_r - \tilde{M}_{r-1} \cosh \alpha \lambda \right\} + 2D_{xy} \tilde{\theta}_{r-1} + C_{r-1,r} \\ \tilde{V}_{r,r-1} &= \frac{\alpha}{\sinh \alpha \lambda} \left\{ \tilde{M}_r \cosh \alpha \lambda - \tilde{M}_{r-1} \right\} + 2D_{xy} \tilde{\theta}_r + C_{r,r-1} \end{aligned} \quad (6)$$

式(5), (6) で $\tau_{r-1,r}, \tau_{r,r-1}, C_{r-1,r}, C_{r,r-1}$ は (r-1, r) 区間の荷重項であって

$$\tau_{r-1,r} = \tilde{w}_p'|_{y=0}, \tau_{r,r-1} = \tilde{w}_p'|_{y=\lambda}, C_{r-1,r} = -D_y \tilde{w}_p''|_{y=0}, C_{r,r-1} = -D_y \tilde{w}_p''|_{y=\lambda}$$

3. 差分方程式:

横桁 \$r\$ の微分方程式 \$EI \frac{d^4 \tilde{w}_r}{dx^4} = Q\$ を \$x\$ についでフーリエ級数に展開して

$$\tilde{Q} = EI \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \tilde{w}_r \quad (7)$$

横桁位置 \$r\$ におけるせん断力のつり合の式はそれを横桁上に作用する荷重として、

$$\tilde{V}_{r,r-1} - \tilde{V}_{r,r+1} - \tilde{Q}_r = -\tilde{P}_r \quad (8)$$

これに式(6)(7)を代入して

$$\frac{\alpha}{\sinh \alpha \lambda} \left\{ d^2 \tilde{M}_{r-1} + 2(1 - \cosh \alpha \lambda) \cdot \tilde{M}_r \right\} - EI \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \tilde{w}_r = - \left\{ C_{r,r-1} - C_{r,r+1} + \tilde{P}_r \right\} \quad (9)$$

また、たわみ角の連続条件 \$\theta_{r,r-1} - \theta_{r,r+1} = 0\$ に式(5)を代入して

$$\frac{1}{D_y \alpha \sinh \alpha \lambda} \left\{ \frac{\sinh \alpha \lambda}{\alpha \lambda} - 1 \right\} d^2 \tilde{M}_{r-1} - 2(1 - \cosh \alpha \lambda) \tilde{M}_r + \frac{1}{\lambda} d^2 \tilde{w}_{r-1} = \tau_{r,r-1} - \tau_{r,r+1} \quad (10)$$

4. フーリエ定積分変換による解:

式(9)(10)にフーリエ定積分変換をほどこし、\$r=0, m\$ で \$\tilde{w}=0, \tilde{M}=0\$ なる境界条件を考えると、

$$\alpha \left\{ \frac{f_1}{f_3} + \frac{1}{f_3} D_2 \right\} S_2[\tilde{M}] + EI \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 S_2[\tilde{w}] = S_2[C_{r,r-1} - C_{r,r+1}] + S_2[\tilde{P}_r] \quad (11)$$

$$\frac{1}{D_y \alpha} \left\{ -\frac{f_1}{f_3} + \frac{f_2}{f_3} D_2 \right\} S_2[\tilde{M}_r] + \frac{1}{\lambda} D_2 S_2[\tilde{w}_r] = S_2[\tau_{r,r-1} - \tau_{r,r+1}] \quad (12)$$

上式中、\$f_1 = 2(\cosh \alpha \lambda - 1)\$, \$f_2 = (\sinh \alpha \lambda - \alpha \lambda) / \alpha \lambda\$, \$f_3 = \sinh \alpha \lambda\$, \$D_2 = 2(1 - \cos \frac{n\pi}{m})\$

式(11)(12)より \$S_2[\tilde{w}]\$, \$S_2[\tilde{M}]\$ を求めて次の逆変換 \$\tilde{w}_r, \tilde{M}_r\$ を求められる。

$$\tilde{w}_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m-1} S_2[\tilde{w}] \sin \frac{i\pi}{m} r, \quad \tilde{M}_r = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m-1} S_2[\tilde{M}_r] \sin \frac{i\pi}{m} r \quad (13)$$

また区間 \$(r-1, r)\$ での値は式(3)より

$$\tilde{w} = \tilde{w}_{r-1} \left(1 - \frac{y}{\lambda}\right) + \tilde{w}_r \frac{y}{\lambda} + \frac{1}{D_y \alpha^2} \left\{ \tilde{M}_{r-1} \left(1 - \frac{y}{\lambda} - \frac{\sinh \alpha (\lambda - y)}{\sinh \alpha \lambda}\right) + M_r \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{\sinh \alpha y}{\sinh \alpha \lambda}\right) \right\} + \tilde{w}_P \quad (14)$$

$$\tilde{M} = -D_y \tilde{w}'' = M_{r-1} \frac{\sinh \alpha (\lambda - y)}{\sinh \alpha \lambda} + M_r \frac{\sinh \alpha y}{\sinh \alpha \lambda} - D_y \tilde{w}_P'' \quad (15)$$

上式をフーリエ逆変換を行なう事より \$w, M\$ を求める

$$w = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \sin \frac{n\pi}{b} x, \quad M = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{M}_n \sin \frac{n\pi}{b} x$$

5. 荷重項:

式(3)の \$w_P\$ は荷重 \$P\$ が区間 \$(r_0-1, r_0)\$ の \$y=c\$ に作用しているとする

$$\tilde{w}_P = \begin{cases} -\frac{\tilde{P} \lambda}{D_y \alpha^2} \left\{ \frac{\sinh \alpha y \sinh \alpha (\lambda - c)}{\alpha \lambda \sinh \alpha \lambda} - \frac{y}{\lambda} \left(1 - \frac{c}{\lambda}\right) \right\} & c \geq y \\ -\frac{\tilde{P} \lambda}{D_y \alpha^2} \left\{ \frac{\sinh \alpha c \sinh \alpha (\lambda - c)}{\alpha \lambda \sinh \alpha \lambda} - \frac{c}{\lambda} \left(1 - \frac{y}{\lambda}\right) \right\} & y > c \end{cases}$$

したがって式(5)(6)の \$\tau_{r,r-1}, \tau_{r,r+1}, C_{r,r-1}, C_{r,r+1}\$ は \$r=r_0\$ で

$$\tau_{r,r-1} = \frac{\tilde{P}}{D_y \alpha^2} \left\{ \frac{\sinh \alpha c}{\sinh \alpha \lambda} - \frac{c}{\lambda} \right\}, \quad \tau_{r,r+1} = \frac{\tilde{P}}{D_y \alpha^2} \left\{ \frac{\sinh \alpha (\lambda - c)}{\sinh \alpha \lambda} - \frac{\lambda - c}{\lambda} \right\}$$

$$C_{r,r-1} = -P_r \frac{\sinh \alpha c}{\sinh \alpha \lambda}, \quad C_{r,r+1} = P_r \frac{\sinh \alpha (\lambda - c)}{\sinh \alpha \lambda}$$

6. おまげき: 以上、連続直交異方性版についてフーリエ定積分変換を用いた解析方法を示したが、この方法は

\$D_y \neq 0\$ の一般の直交異方性版についても適用できる。

* フーリエ定積分変換を \$S_2[f(x)] = \sum_{n=1}^{m-1} f(x) \sin \frac{n\pi}{m} x\$ とすると \$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m-1} S_2[f(x)] \sin \frac{n\pi}{m} x\$

また \$S_2[\lambda f(x-1)] = -\sin \frac{i\pi}{m} \{(-1)^i f(cm) - f(c)\} - D_2 S_2[f(x)]\$. 「Jap. Nat. Cong. for Appl. Mech (1970)」

参考文献: S.G. Nomachi, K.G. Matsuoaka: Applications of Finite Fourier Integration Transforms for Structural Mechanics, Proc. of the 20th J