

まえがき

数学的には等方性と同じように解析出来る、弾性定数の間に特別な関係のある直交異方性2次元弾性体の平面弾性問題の解析を半楕円切欠きを有する半無限弾性体の場合について文献1)に述べた。

同様の事を半楕円切欠きを有する半無限直交異方性薄板の場合を例に応力解析したものである。

直交異方性薄板の曲げ剛さの主軸の方向と座標  $x, y$  軸の方向が一致するとき、たわみに関する微分方程式は

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_x \nu_y + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = g(x, y) \quad (1)$$

ここに  $D_x, D_y$  は、弾性主軸方向曲げ剛さ、 $D_{xy}$  はねじり剛さ、 $\nu_x, \nu_y$  は曲げに関するポアソン比で、Maxwellの相反定理より  $\nu_x/D_x = \nu_y/D_y$  である。

今これらの曲げ剛さ等の間に  $D_x \nu_y + 2D_{xy} = \sqrt{D_x D_y}$  なる関係のあるとき、式(1)は

$$x_1 = x, \quad y_1 = \sqrt{D_x/D_y} y \quad (2)$$

なる変数変換を行なうと

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y_1^4} = g(x_1, y_1) \quad (3)$$

となる。ここでは弾性定数の間にこのような関係のある半楕円切欠きを有する直交異方性薄板が面外曲げを受けた場合の曲げモーメントの分布を求めたものである。

解法

以下との解析に必要な式を書き上げる。またここでは板の横方向荷重  $g=0$  の場合を述べる。したがって外力は境界線上に作用する。複素変数  $z = x + iy_1$  を導入し、 $z$  の正則な複素変数  $\varphi_1(z_1), \chi_1(z_1)$  を用いて式(3)の一般解は、 $w = \text{Re}[\bar{z}_1 \varphi_1(z_1) + \chi_1(z_1)]$ 、曲げモーメント  $M_x, M_y$ 、

ねじりモーメント  $H_{xy}$ 、せん断力  $N_x, N_y$  の表示式は、

$$k^2 M_y - M_x + 2ik H_{xy} = 2D_x(1-k^2\nu_y)[\bar{z}_1 \varphi_1'(z_1) + \psi_1'(z_1)]$$

$$M_x + k^2 M_y = -2D_x(1+k^2\nu_y)[\varphi_1(z_1) + \overline{\varphi_1(\bar{z}_1)}]$$

$$N_x - iN_y = -4D_x \varphi_1'(z_1)$$

ここに  $k = \sqrt{D_x/D_y}$ ,  $\psi_1(z_1) = d\chi_1(z_1)/dz_1$  である。

以上の式でもわかるように、あたかも曲げ剛さ  $D_x$ 、ポアソン比  $k^2\nu_y$  ( $=\nu_x/k$ ) を有する等方性板を解析するのと同じである。

境界条件式は

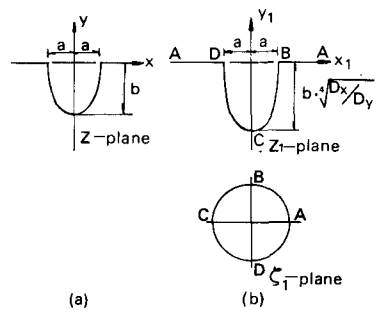
$$-\frac{3+k^2\nu_y}{1-k^2\nu_y} \varphi_1(z_1) + z_1 \overline{\varphi_1'(z_1)} + \overline{\psi_1(z_1)} = \frac{1}{D_x(1-k^2\nu_y)} \int_0^s [m(s) + i \int_0^s p(s) ds] (dx_1 + i dy_1) \quad (4)$$

ここに  $m(s)$  は境界線に沿う単位長さ当たりの曲げモーメント、 $p(s)$  は置換せん断力である。

次に写像関数を導入したときの式を示す。

図-1(2)に示す  $z = x + iy_1$  面上の解析すべき物理平面は、式(2)のアフィン変換を行なうと図-1(b)に示す  $z_1 = x_1 + iy_1$  の座標面上の領域に示される。ここでこの  $z_1$  平面上の領域を  $\zeta_1$  面上の単位円内部に等角写像する有理型の写像関数  $\omega_1(\zeta_1)$  を作れば、等方性と同様にして同じ解を得ることができる。

応力関数を  $\varphi_1(z_1) = \varphi_1\{\omega_1(\zeta_1)\} \equiv \phi(\zeta_1)$ ,  $\psi_1(z_1) \equiv \Xi(\zeta_1)$  と置き、境界条件式(4)をこれらの関数で表わし



、単位円周上のコーシーの積分を行なうことにより  
 等方性の場合と全く同様にして求められる。

又、 $y$ 方向応力成分を曲線座標  $\rho, \theta$  の応力成分  
 に変換するには、式

$$M_p + M_\theta = M_x + M_y$$

$$M_\theta - M_p + 2iH\rho\theta = (M_y - M_x + 2iHx_y) e^{2i\alpha}$$

$$N_p - iN_\theta = (N_x - iN_y) e^{i\alpha}$$

を用いばよい。ここに

$$e^{i\alpha} = \frac{\{(1+k)\omega_1\zeta_1 + (1-k)\omega_2\zeta_2\}}{\sqrt{(\omega_1\zeta_1 + \omega_2\zeta_2)^2 - k^2(\omega_1\zeta_1 - \omega_2\zeta_2)^2}}$$

である。

### 写像関数

図-1(b)に示す深さ  $b \cdot \sqrt{D_x/D_y} = kb$ 、幅  
 $2a$ の半楕円切欠きを単位円内部に等角写像する関  
 数は

$$\zeta_1 = -i \frac{1+\zeta_1}{1-\zeta_1} - i\sqrt{2} \frac{kb}{a} \frac{\sqrt{1+\zeta_1^2}}{1-\zeta_1} \quad (5)$$

である。ここで  $0 < b/a < 1$  のとき図-1(a)は  
 扁平な半楕円切欠きを、 $b/a = 1$  のとき半円切欠き  
 を、 $b/a > 1$  のとき深い半楕円切欠きを表わす。

式(5)の有理型写像関数<sup>2)</sup>は、

$$\sqrt{1+\zeta_1^2} = \sum_{j=1}^{10} \left\{ \frac{-A_j}{1+\zeta_1^2} + A_j \right\} + 1$$

を用いて

$$\zeta_1 = \omega(\zeta_1) = -i \frac{1+\zeta_1}{1-\zeta_1} - i \frac{kb}{a} \frac{\sqrt{2}}{1-\zeta_1} \left[ \sum_{j=1}^{10} \left\{ \frac{-A_j}{1+\zeta_1^2} + A_j \right\} + 1 \right]$$

である。

### 計算例

又軸方向遠方に一様曲げモーメント1.0の作用し  
 た場合の対称軸上および境界線上の曲げモーメント  
 の値を計算した。

図-2は、 $b/a = 0.5$ の半楕円切欠きの場合で  
 ポアソン比  $\nu_x = \nu_y = 0$ 、曲げ剛さ  $D_x/D_y = 0.5$ 、  
 1.0(等方性)、2.0の3通りの場合の応力分布  
 を示す。 $D_x/D_y$ が大きくなる程最大曲げモーメント  
 の値は大きくなる。

図-3は、半円切欠きの場合の曲げモーメントの分布を示したものである。図-4は、 $b/a = 2.0$ の場合を示  
 す。

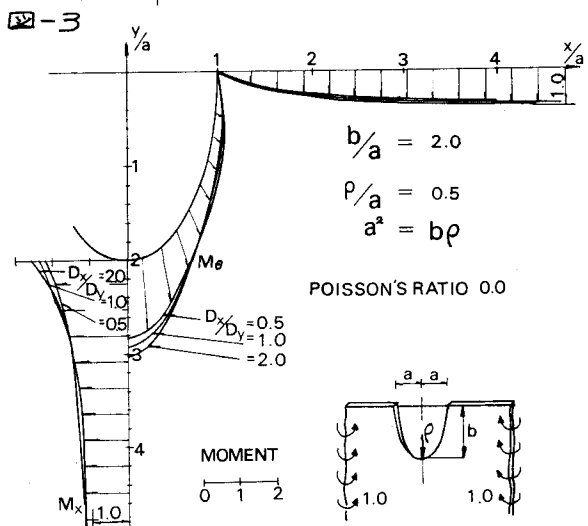
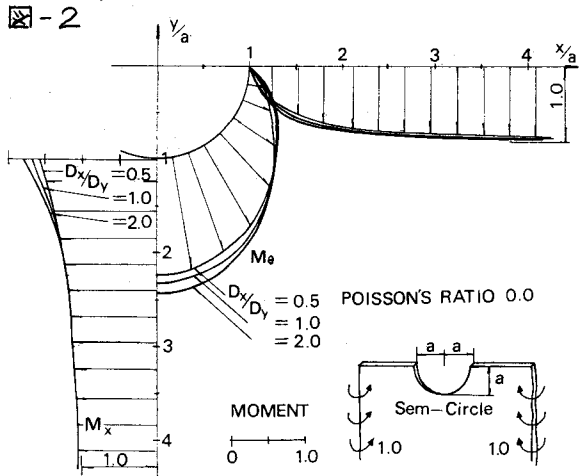
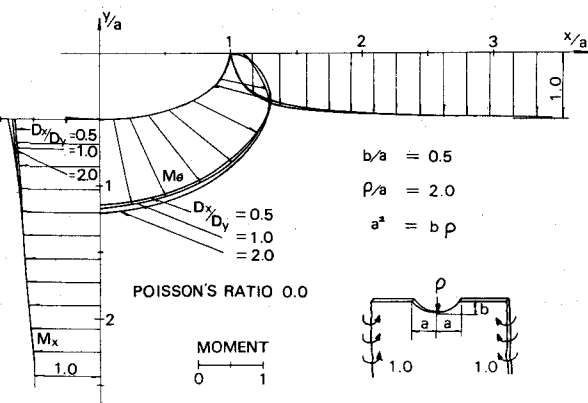


図-4

文献 1) 長谷部, 土木学会中部支部研究発表会講演概理集 昭48. 2  
 2) 長谷部, 名古屋工業大学学報 才24巻(1971)