

山梨大学・工学部 正員 平島 健一  
 東北大学・大学院 学生員。鈴木 信久

1. 緒言

等方性弾性体内に単一の孔と設けた場合の境界値問題の解法は多数の研究者により、各種の方法を用いてなされてきた。また複数個の孔と有するような多連結領域の境界値問題の解析も、電子計算機の発達に伴って各種の方法を用いて数値計算がなされてきた。ここでは closed solution と得ることの可能な円あるいは楕円以外の任意形状孔と有する異方性板内の応力状態と求めるために、西谷<sup>2)</sup>、Chrcurel & Supprger<sup>3)</sup> および 丹羽・小林・大本<sup>4)</sup> によって用いられた無限板内に作用する集中力 (Kelvin 問題) の基本解と利用することと試みたものである。単一の任意形状孔と有する異方性板の無限遠に等分布一軸荷重あるいは曲げモーメント荷重が作用する場合の孔縁の特異点における応力値は Lekhnitskii<sup>5)</sup> および Stephens<sup>6)</sup> によって近似値が与えられているので、それらの結果と本報によるものと比較し、さらに複数個の場合に適用することと目的とするものである。

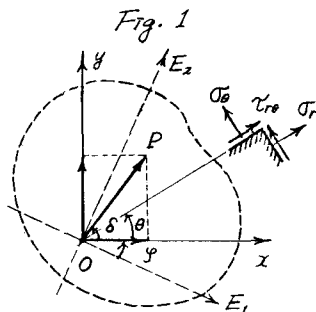
2. 異方性体に対する Kelvin 問題の解

異方性弾性板内の任意の一点 O に任意方向をもつ集中力 P が作用する場合の板内に至る応力は、Fig. 1 のように O 点を通る直交デカルト座標系 (x, y) と設けると次式のように与えられる。

$$\sigma_x = 2\text{Re}\left(\frac{\mu_1^2 A}{z_1} + \frac{\mu_2^2 B}{z_2}\right), \sigma_y = 2\text{Re}\left(\frac{A}{z_1} + \frac{B}{z_2}\right), \tau_{xy} = -2\text{Re}\left(\frac{\mu_1 A}{z_1} + \frac{\mu_2 B}{z_2}\right) \quad (1)$$

$$z_1 = x + \mu_1 y, \quad z_2 = x + \mu_2 y \quad (2)$$

なお、上式中の係数 A, B は板の弾性コンプライアンス  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}$  および特性方程式の根  $\mu_1, \mu_2$ , 作用荷重 P とその方向角  $\delta$  によって決定される複素定数である。



したがって、この解を基本にして、西谷<sup>2)</sup>、Chrcurel<sup>3)</sup>の方法と利用すれば、異方性板内の第一種境界値問題の数値解析が可能となる。

3. 解法の精度

この方法による解析結果の精度については、上述の文献と比べているような具体例に対して検討がなされている。ここでは、内部境界を持つ問題について精度の検討を行った。

すなわち、まずはじめに等方性無限板内に円孔と有し、その無限遠より一軸引張応力が作用する場合の孔周縁応力値 (Kirsch 問題) の厳密解と本法によるものとを比較したものが、Table 1 である。基点の区切り間隔と中心角  $\Delta\theta = 5^\circ$  にした場合の誤差は 2% 程度とかなり小さい。次に、次式

$$x_0 = d_0 \cos \theta + \sum_{m=1}^7 d_m \cos m\theta, \quad y_0 = d_0 \sin \theta - \sum_{m=1}^7 d_m \sin m\theta \quad (3)$$

に、 $d_0, d_m (m=1, 2, \dots, 7)$  の値は Heller<sup>7)</sup> の結果を用いて計算を行った。

Table 1

$\theta$	Present Method		Exact Solution
	$\Delta\theta=10.0^\circ$	$\Delta\theta=5.0^\circ$	
0°	-0.929	-0.983	-1.000
10°	-0.814	-0.864	-0.879
20°	-0.481	-0.522	-0.532
30°	0.028	0.002	0.000
40°	0.653	0.645	0.653
50°	1.318	1.329	1.347
60°	1.943	1.971	2.000
70°	2.452	2.495	2.532
80°	2.784	2.838	2.879
90°	2.900	2.956	3.000

Table 2

$\theta$	Present Method			Exact Solution
	$\Delta\theta=10.0^\circ$	$\Delta\theta=5.0^\circ$	$\Delta\theta=2.5^\circ$	
	0°	-0.710	-0.774	
10°	-0.705	-0.769	-0.802	-0.842
20°	-0.674	-0.734	-0.765	-0.803
30°	-0.471	-0.505	-0.519	-0.535
40°	0.756	0.860	0.923	1.002
50°	2.684	2.960	3.086	3.224
60°	2.543	2.599	2.625	2.657
70°	2.133	2.099	2.078	2.056
80°	1.934	1.868	1.832	1.792
90°	1.876	1.803	1.764	1.720

この結果より、区切り内隔として等中心角 $\Delta\theta=2.5^\circ$ としたものでも、厳密解に比して $\pm 5\%$ 程度の誤差が認められた。この原因は正方形孔であるにも拘らず $\Delta\theta$ を一定とした基点と誤けたことにもよると考えられる。

同様の手法とFig.2に示すような2個の矩形孔を有する等方性板に適用してみた。左側の図は無次元より $\sigma_x$ が、右側のものは $\sigma_y$ がそれぞれ作用した場合の右側の孔周縁の応力分布図である。 $\Delta\theta$ が小さくなるにつれて、前者の一方が別の手法を用いて計算した結果に漸近して行くことがわかった。

#### 4. 任意形状孔と有する

##### 異方性板への適用

これは Lekhnitskii が取扱っている問題と併用して計算を行なう。Fig.3に示すような正方形孔が存在する直交異方性板(弾性定数: $E_1=1.2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E_2=0.6 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu_2=0.071$ ,  $G=0.07 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ )の無限遠に一軸荷重応力 $\sigma_x$ が作用する場合の孔縁の応力分布と主弾性軸の傾斜角 $\psi$ をパラメータとしてプロットしたものがFig.3(a),(b)である。図の右半分は $\psi=0^\circ$ 、左半分は $\psi=90^\circ$ の場合であり、また参考のため等方性体とした場合の分布を点線でも示した。

Lekhnitskii は孔縁のA,B,C各点の応力を振動法を用いて計算しており、その結果と比較したものがFig.3の○,△印であり、Table 3に数値表を示している。

#### 5. おわりに

詳細は比較検討、複数個への適用、精度の向上等については

学会当日に発表する予定である。

参考文献: 1) K. Hirasakima; 第22回応用力学連合会 論文論文集 (1973.12発行), 2) 西谷弘信; 日本機学会誌, 第70巻, 627(1957), 3) R. Christoval & E.W. Snyggger; ZAMP, 15, 629(1964), 4) 丹羽 小林 大本; 第27回土木学会講演会, 第1部, 149(1972), 5) S.G. Lekhnitskii; Anisotropic Plates, Gordon and Breach, 57, 130(1968) 6) K. Stephens; Engng. J. Mech. Appl. Math., 5, 206(1952), 7) S.R. Heller, Jr. and Others; Proc. 3rd U.S. National Congr. Appl. Mech., 357(1958).

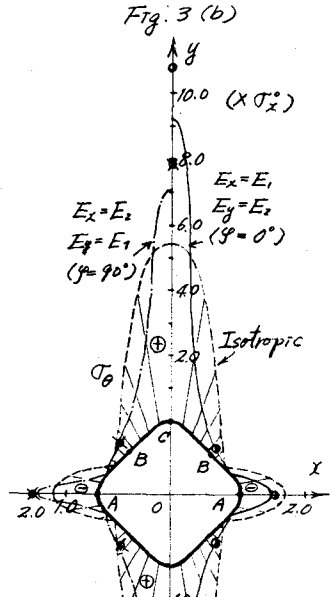
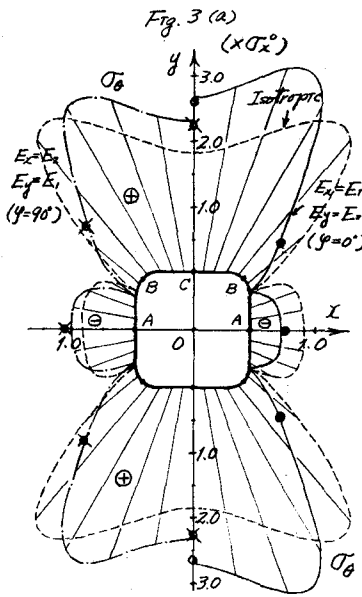
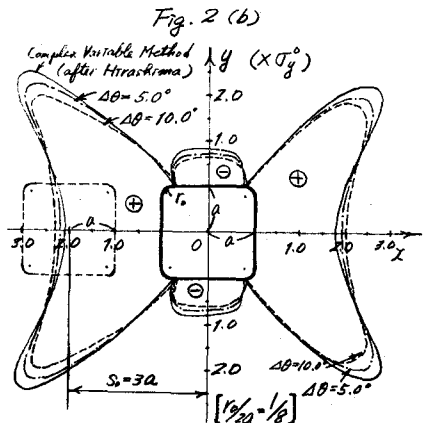
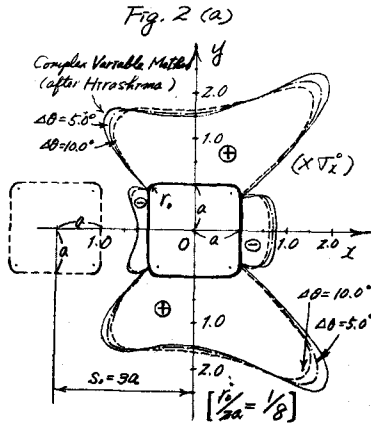


Table 3

	points	Present Method	after Lekhnitskii		
			Method (1)	Method (2)	
Fig. 3(a)	$E_x=E_1$	A	-0.501	-0.57	—
	$E_y=E_1$	B	0.754	0.83	—
	$(\psi=0^\circ)$	C	2.697	2.60	2.31
$d_0=1.0$ , $d_1=-1/3$ , $d_2=0$ , ( $\nu=1.2, 5.6/8$ )	$E_x=E_2$	A	-1.001	-1.11	—
	$E_y=E_1$	B	1.187	1.28	—
	$(\psi=90^\circ)$	C	2.307	2.22	2.06
Fig. 3(b)	$E_x=E_1$	A	-1.017	-1.05	—
	$E_y=E_2$	B	0.255	0.21	—
	$(\psi=0^\circ)$	C	9.260	10.82	10.39
$d_0=1.0$ , $d_1=1/3$ , $d_2=0$ , ( $\nu=1.2, 4.5/6, 7$ )	$E_x=E_2$	A	-1.865	-2.06	—
	$E_y=E_1$	B	0.448	0.41	—
	$(\psi=90^\circ)$	C	7.117	7.86	7.80