I-153 部分分布荷重を担う扇形平板の曲げについて

○北海道大学工学部 正員 芳村 仁
北海学園大学工学部 〃 本多祐也

1. はしがき 曲線橋床版や曲線スラブ橋は扇形状の平板として扱うことができ，荷重として部分分布荷重が作用する場合について結果を得たので報告したい。平板の曲げの問題は4階の偏微分方程式を解くことになるが，荷重が部分分布荷重の場合には，微分方程式のGreen関数を積分する方法が有効であり，線荷重についてはすでに発表した[1]。円板の曲げの問題についてこの方法による解が発表されているが[2]，ここでは二直線辺単純支持の扇形平板について解き，中心角，載荷位置などをパラメーターとして数値計算を行ない，また放射方向に連続な扇形板についても計算を行なった。

2. 部分分布荷重を担う扇形平板の曲げ 平板の曲げの微分方程式は極座標を採用すると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\Delta w(r,\theta) = \frac{q(r,\theta)}{D} \quad \text{ここで} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &D = \text{板の曲げ剛性} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ここで w はたわみ，$q(r,\theta)$ は分布している荷重強度，ν はポアソン比である。

方程式(1)の特異解は

$$\frac{1}{8\pi D} R^2 \log R \qquad (2)$$

で与えられるので[3]特解 w_p は次式のようになる。(図-1)

$$w_p = \frac{1}{8\pi}\iint_{(A)} R^2 \log R \, \frac{q(r',\theta')}{D} \, dA \qquad (3)$$

ここで $(r',\theta')=dA$ の座標，$R=(r,\theta)$ と (r',θ') との距離

$$= \{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta-\theta')\}^{\frac{1}{2}}$$

この特解と同次方程式の解 $w_c(r,\theta)$ を重ね合わせて扇形平板の曲げの解を次のように求めることができる。

$$w(r,\theta) = w_c + w_p = \sum_m \left(A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}\right)\left(\sin m(\theta-\theta_1) - \sin m(\theta-\theta_2)\right) + w_p \qquad (4)$$

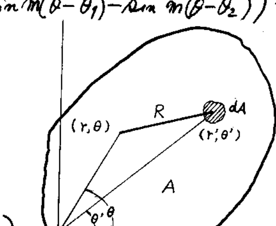


図-1

図-2のように $\theta_1 \sim \theta_2$ の扇形領域に載荷されている場合は

$$w_p = \frac{1}{16\pi D}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_b^a p(r')\cdot r'\{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta-\theta')\} \times$$

$$\times \log\{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta-\theta')\}\, dr'd\theta' \qquad (5)$$

となる。$p(r)=p=\text{const.}$ の場合につき式(5)の計算を実行し，扇形平板の中心角を α として，展開式の形を

$$w_p = \frac{2}{\alpha}\sum_\beta \frac{p}{8D}\cdot \gamma_\beta(r)\{\sin\beta(\theta-\theta_1) - \sin\beta(\theta-\theta_2)\}$$

とするとき $\gamma_\beta(r)$ の値は

$$\gamma_\beta(r) = \frac{1}{\beta^2(\beta^2-1)}\left\{\frac{8\beta(\beta^2-1)}{(\beta^2-4)(\beta^2-16)} r^4 + \frac{b^{\beta+2}}{r^\beta}\left(\frac{\beta-1}{\beta+4}b^2 - \frac{\beta+1}{\beta+2}r^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{r^\beta}{a^{\beta-2}}\left(\frac{\beta-1}{\beta-2}r^2 - \frac{\beta+1}{\beta-4}a^2\right)\right\}$$

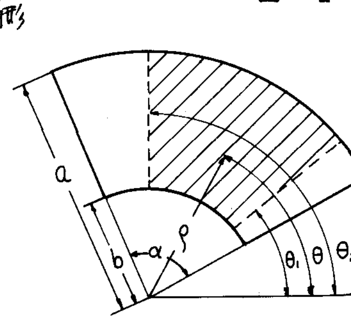


図-2

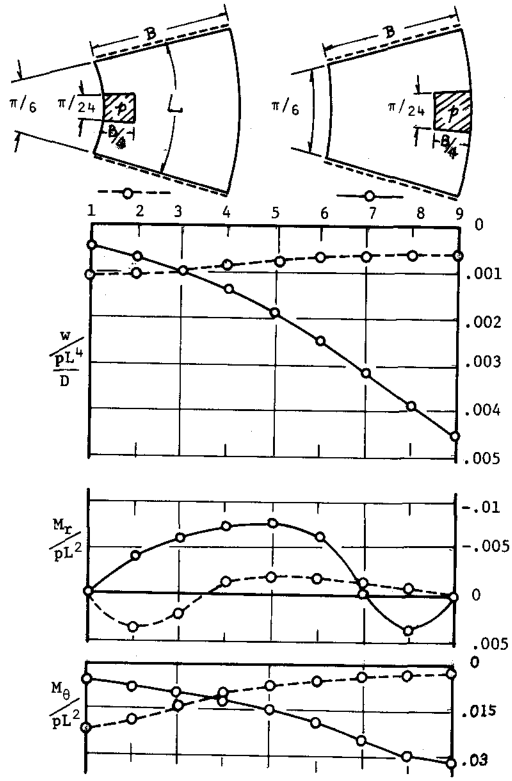
ここで $\beta = \dfrac{m\pi}{\alpha}$,

この W_p と中心角 α の扇形板に対する W_c を重ね合わせ4個の未定係数を境界条件または連続条件より決定すれば解が得られる。

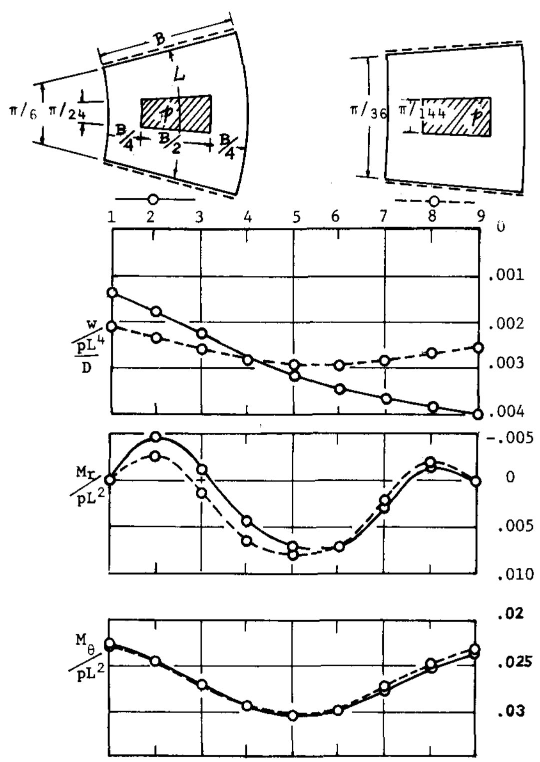
3. 数値計算例 計算例として 1) 中央部分に部分分布荷重が載荷された辺比1, 2円弧辺自由の扇形板のたわみ, 曲げモーメント M_r, M_θ, の値を中心角 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ および $\alpha = \frac{\pi}{36}$ について求めた結果である(図-3) 2) 内外円弧辺近傍に部分分布荷重を担う1)と同じ条件の扇形平板(図-4) 3) 放射方向に連続な扇形板(中間に円周方向の支持がある場合)に部分分布荷重が作用した場合(図-5) を扱い図示した。なお詳細は講演時に発表する予定である。

4. 参考文献

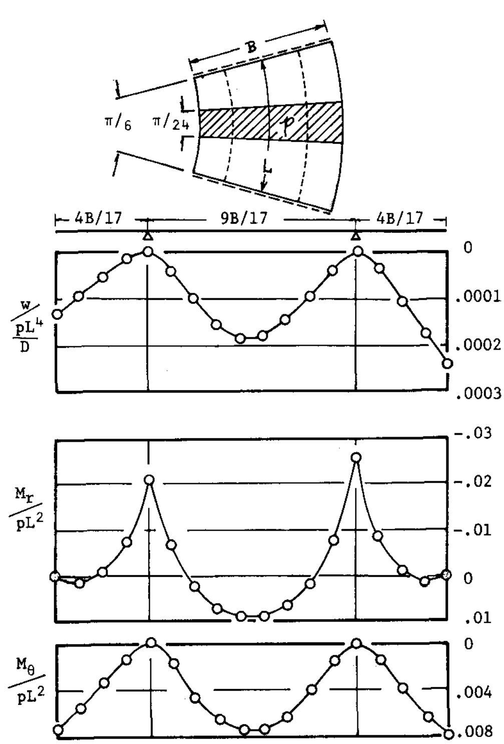
1) 芳村仁・本多祐也：部分荷重を担う扇形板について，昭46土木学会講演会概要集
2) Saito, Kawakami et.: Bending of A Circular Plate Under A Radially Distributed Load, JNCAM 1955. 3) R. Courant u. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I.



図－4



図－3



図－5