

1. まえがき

四辺固定矩形板の弾塑性問題の解析は、Corner部分での特異性のために完全解は困難であり、辺長比が3以上となる場合に一次元的に(帯板として)解かれているに過ぎない^(1,2)。しかしながら鋼製セグメントにおけるスキンプレートの如き四辺固定の薄板においては、膜力による影響がきわめて大きいので、膜力を主体とした極限解析を行なうならば、完全解ではなくても十分に実用性のある結果が得られるものと考えられる。この観点から、二次元的な膜理論の極限解析による近似解を算出するとともに、現在までに理論的、実験的に確かめられている一次元問題との比較検討を行ない、二次元問題での弾塑性変形の過程を推測して、計算方法の妥当性を検討した。

2. 弾塑性統一方程式と弾塑性変形の推移

四辺固定の薄肉の矩形板が一樣な垂直圧力をうけると、垂直圧力の増加により、弾性状態、弾塑性状態、全塑性状態と順次に変化する。これらを Basu, Chapman, Massonet⁽³⁾による次の平衡式と適合式で統一的に把握する。

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D} + \frac{r}{D} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + G(x, y) \quad \text{----(1)}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + H(x, y) \quad \text{----(2)}$$

w:板のたわみ D:板の曲り剛性
 p:垂直荷重 ϕ : Airy 函数
 r:板厚 G(x,y), H(x,y); 塑性ポテンシャルにもとづく函数⁽³⁾
 E:弾性係数

まず弾性状態では、(1),(2)式における G(x,y), H(x,y)はともに零であるが、垂直荷重の増加にともなうて 図-1 (i)(ii)のように固定辺上に塑性ヒンジ線が発生し、G(x,y), H(x,y)は刻々と変化してくる。さらに板中央部に全塑性状態の領域(図-1 (iii)(iv))が生ずる時点より膜力が次第に顕著となり、塑性領域は拡大して板の大部分を覆う状態となる。この状態では、塑性条件によって、塑性モーメントの減少に相反して膜力が増大し、最大値 T_0 に収束する。極限的には塑性膜状態(図-1 (v))を論ずる問題となり、(1),(2)式は次第に(3)式に漸近してくる。

$$T_0 \cdot \nabla^2 w = -p \quad T_0 = \sigma_y r \quad \text{----(3)}$$

σ_y : 軸引張試験から得られる降伏応力

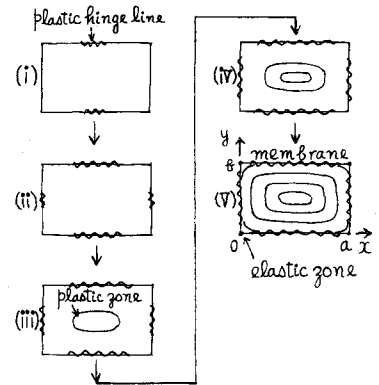


図-1 弾塑性変形の推移

3. 極限解析

極限的な塑性膜状態のもとでは矩形の四辺は固定辺であるにもかかわらず図-1 (v)のように Corner点附近をのぞいた四辺の大部分は塑性ヒンジ線が形成され、回転端と同様な状態となっている。したがってこの境界条件を満足するように(3)式の解 w を(4)式で表わすことにする。

$$w = \sum_{m,n=1,2,3,\dots} K_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{----(4)}$$

x, y; 図-1 (v)で示す x, y 座標
 a, b; 図-1 (v)で示す二辺の長さ

(4)式を(3)式に代入し、両辺に $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ を乗じて板全体にわたり積分すると、定数 K_{mn} が(5)式のように定まる。

$$K_{mn} = \frac{16 p a^2 b^2}{\pi^4 T_0 m n (m^2 b^2 + n^2 a^2)} \quad (m, n \text{ とも 奇数}) \quad K_{mn} = 0 \quad (\text{その他}) \quad \text{----(5)}$$

(4),(5)式より最大たわみ $w_m(\lambda)$ は板の中央点 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ に生じて (6)式で求められる。

$$w_m(\lambda) = \frac{16 p a^2}{\pi^4 T_0} \phi(\lambda), \quad \phi(\lambda) = \sum_{m,n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} - 1}{m^3 n + m n^3 \lambda^2}, \quad \lambda = \frac{a}{b} \quad \text{----(6)}$$

(6)式より正方形板および帯板での $\phi(1)$, $w_m(1)$ および $\phi(0)$, $w_m(0)$ は次の(7)(8)式で表わされる。

$$\phi(1) = \sum_{m,n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} - 1}{m n (m^2 + n^2)} = 0.450, \quad w_m(1) = \frac{16 p a^2}{\pi^4 T_0} \phi(1) = 0.074 \frac{p a^2}{\sigma_f h} \quad \text{----(7)}$$

$$\phi(0) = \sum_{r=1,2,3,\dots} (-1)^{r+1} \frac{1}{r^3} \cdot \sum_{\Delta=1,2,3,\dots} (-1)^{\Delta+1} \frac{1}{\Delta} = \frac{\pi^4}{128} = 0.761, \quad w_m(0) = \frac{16 p a^2}{\pi^4 T_0} \phi(0) = 0.125 \frac{p a^2}{\sigma_f h} \quad \text{----(8)}$$

(8)式は帯板の場合の一次元的な解の極限式に一致しており、また辺長比 λ が3以上の矩形板における近似解とみなしてよいことが実験的に確かめられている^{(1),(2)}。

4. 弾塑性過程の考察

正方形板、帯板の弾塑性状態での最大たわみを $w_{mj}(1)$, $w_{mj}(0)$ とし、その比 $w_{mj}(0)/w_{mj}(1)$ について、剛塑性の正方形板、帯板の極限解析に膜力要素を導入した計算結果および(1)(2)式による、一次元、二次元問題相互間の関連性の検討結果にもとづき考察すると、弾性状態から塑性状態への推移にともない膜力が増大して $w_{mj}(0)/w_{mj}(1)$ の値が次第に減少し、塑性膜状態では $w_{mj}(0)/w_{mj}(1) = 1.69$ に収束してくる。この関係を図示すると図-2 のようになる。これより正方形板、帯板について垂直圧力 p を同一とした場合での p と $w_{mj}(1)$, $w_{mj}(0)$ との関係を求めると、帯板の $w_{mj}(0)$ の値は既知であるから、これを基準として $w_{mj}(0)/w_{mj}(1)$ の比率より $w_{mj}(1)$ が定まり、図-3 が得られる。(図-3 での p_c は膜力

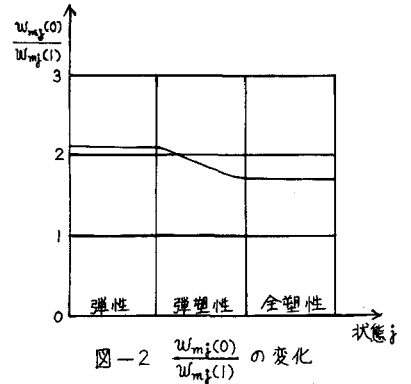


図-2 $w_{mj}(0)/w_{mj}(1)$ の変化

5. あとがき

図-3、または(7)式の関係を示した図-4によつて、スキンプレートについては周辺が固定に近い状態の薄板であるので、膜力の影響が大きく、この膜力が存在するために崩壊現象を生ずることなく、きわめて高い荷重の支持が可能であることがわかる。この場合、最大たわみ w_m に対応する最大歪 ϵ_m が存在し、その値が鋼材での許容最大歪 ϵ_c 以下でなければならぬが、一辺 $a = 36.1$ cm の正方形板でのスキンプレートは、通常 $w_m \leq 15$ mm であれば十分な安全性があることが言える。なお上記弾塑性過程の近似解析の一方法として、Massonnet の Finite difference solution³⁾ がある。これは(1)(2)での G, H 函数を弾塑性状態での微小区画ごとに細分し、 $G_j = \sum_{i=1}^j G_{ji}$, $H_j = \sum_{i=1}^j H_{ji}$ として状態別に増分量を逐次追跡算出するものである。また同様方法として急速な発展をみた有限要素法⁴⁾ があり、これらによつて、さらに検討を続ける必要がある。

6. 参考文献

- 1). 藤井, 内野: 膜力をともなう平板の塑性設計: 石川島播磨技報 (昭37)
- 2). 鶴田, 他: 水圧をうける平板の強度: 造船協会論文集第109号 (昭36)
- 3). Massonnet: General theory of elasto-plastic membrane-plates: Engineering Plasticity: Cambridge Univ. Press (1968)
- 5). 山田: コンピュータによる構造工学講座 II-2-A: 塑性粘弾性 (1972)

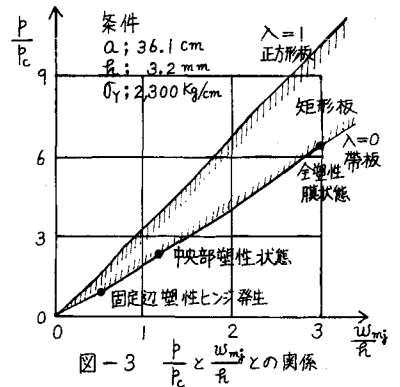


図-3 $\frac{p}{p_c}$ と $\frac{w_{mj}(1)}{a}$ との関係

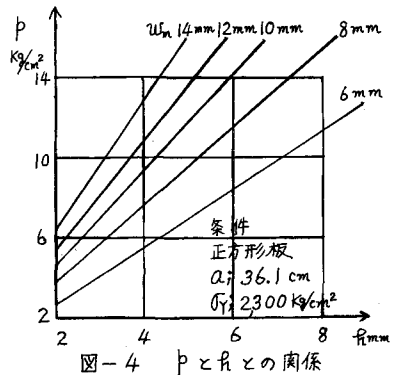


図-4 p と h との関係